

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

**О. О. Сердюк**

**СУЧАСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ  
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

**Посібник**  
**для студентів спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія»**  
**та 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані**  
**технології»**

Краматорськ  
ДДМА  
2018

Сучасні методи дослідження нелінійних динамічних систем.  
Посібник для студентів спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»/  
О. О. Сердюк. – Краматорськ : ДДМА, 2018. – 120 с.

Викладені нові методи математичного аналізу нелінійних динамічних систем. На простих прикладах пояснені механізми виникнення динамічного хаосу, біфуркацій та катастроф, а також принципи фрактального підходу в моделюванні хаотичної динаміки. Наведені останні наукові й практичні досягнення в області моделювання нелінійних динамічних систем.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
1 ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ .....	6
1.1 Проблеми моделювання нелінійної динаміки .....	6
1.2 Проблема детермінізму .....	9
1.3 Особливості дослідження систем із самоорганізацією .....	11
2 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ .....	16
2.1 Поняття про фрактали .....	16
2.2 Фрактальна розмірність. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича .....	17
2.3 Принцип самоподоби фракталів .....	20
2.4 Класичні фрактали .....	22
2.5 L-системи тертл-графіки .....	26
2.6 Система ітерованих функцій .....	28
2.7 Фрактали на комплексній площині .....	31
2.8 Випадкові фрактали .....	35
2.9 Методи визначення фрактальної розмірності тимчасових рядів .....	42
2.10 Реально існуючі фрактали .....	49
3 ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ХАОС У ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ .....	54
3.1 Умови зародження хаотичної динаміки .....	54
3.2 Парадигма детермінованого хаосу – дивний атрактор Лоренца .....	56
3.3 Парадигма детермінованого хаосу – логістичне рівняння .....	60
3.4 Якісні й кількісні ознаки хаосу .....	66
3.5 Практичне застосування хаотичної динаміки .....	68
4 СИНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД У ДОСЛІДЖЕННІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ .....	76
4.1 Сутність синергетики та самоорганізації систем .....	76
4.2 Синергетична концепція самоорганізації нелінійних систем .....	78
4.3 Модель самоорганізованої критичності .....	80
4.4 Синергетичний підхід до управління виробничою діяльністю .....	83
4.5 Фрактальні фабрики .....	86
4.6 Особливості функціонування складних саморегулювальних систем .....	88
4.7 Методологія дослідження саморозвиваючихся систем клітинними автоматами .....	91

4.8 Приклади найпростіших клітинних автоматів .....	93
4.9 У яких задачах потрібні КА? .....	97
<b>5 ЗАСТОСУВАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ</b>	
<b>ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>98</b>
5.1 Сучасні вистави про штучний інтелект і нейронних мережах.....	98
5.2 Принципи функціонування біологічного нейрона.....	100
5.3 Модель нейрона .....	101
5.4 Архітектура одношарових і багатошарових нейронних	
мереж.....	103
5.5 Формування архітектури нейронної мережі й алгоритм	
розв'язку завдань .....	105
5.6 Формалізація завдання .....	107
5.7 Навчання персептрона.....	109
<b>ЛІТЕРАТУРА .....</b>	<b>112</b>
<b>ГЛОСАРІЙ.....</b>	<b>114</b>

## ВСТУП

Згідно з Освітньо-кваліфікаційною характеристикою магістра спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» при виконанні професійних задач він повинен досліджувати та розробляти новітні системи автоматизації. З цією метою Освітньо-професійною програмою підготовки магістра передбачено навчальну дисципліну «Сучасні методи дослідження систем», яка віднесена до циклу професійної підготовки.

Мета дисципліни «Сучасні методи дослідження систем» – освоїти нову методологію наукових досліджень динамічних систем. На відміну від класичних методів аналізу систем нові підходи забезпечують дослідника більш ефективними інструментами.

Ряд властивостей динамічних систем, таких, як нестійкість, нелінійність, відкритість, дисипація, породжують режими, властиві широкому класу складних нелінійних систем, починаючи від механічних, термодинамічних, хімічних, і кінчаючи живими організмами. У першу чергу це **хаотичні режими**, які зараз прийнято вважати характерними етапами розвитку будь-якої досить складної нелінійної системи.

Дослідження й моделювання хаотичних режимів у нелінійних системах представляє досить складну задачу. Однак надзвичайно висока сприйнятливості систем, що перебувають на етапі хаотичного розвитку, потребує розуміння механізмів різких стрибкоподібних переходів та передбачуваності їх поведінки.

Слід зазначити, що у сучасному інформаційному просторі є велика кількість публікацій, присвячених цим питанням, але їх використання викликає у студентів значні складнощі із-за часових обмежень на вивчення дисципліни. При цьому слід також зважити на обмежені ресурси літератури на українській мові.

Навчальний посібник присвячений вивченню особливих режимів динамічної поведінки нелінійних систем, зокрема вивченню явища **динамічного хаосу** та перебудовам якісної картини руху динамічної системи при зміні її параметрів внаслідок **біфуркацій**. Для опису хаотичної поведінки у посібнику розглядається геометрична **мова фракталів**. У навчальному посібнику викладені також нові підходи до визначення структурної стійкості динамічної системи.

Мета навчального посібника «Сучасні методи дослідження нелінійних динамічних систем» – у стислому виді подати студентам методичні рекомендації щодо використання нових підходів у дослідженні нелінійних систем автоматизації. Набуті знання та уміння будуть використані у процесі виконання кваліфікаційної роботи магістра.

# 1 ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Основна задача, яка вирішується магістрантами у процесі навчання, – це задача проведення досліджень по темі кваліфікаційної роботи.

На першому етапі цієї роботи потрібно визначити проблемну ситуацію в обраному об'єкті досліджень і виявити питання, що вимагають вирішення.

Особливістю проблемних ситуацій, що зустрічаються в темах магістерських робіт, є те, що майже всі об'єкти дослідження є нелінійними. Зазвичай нелінійність визначається дисипацією, тобто переходом частини впорядкованої енергії в неупорядковану енергію, наприклад, теплову.

Нелінійні системи в загальному виді не можуть бути вирішені, теорія нелінійних систем дозволяє одержати тільки часткові розв'язки у вигляді фазових траєкторій на площині. Розглядаючи механічні системи, фахівці зазвичай намагаються виключити нелінійні елементи, приміром, тертя, що викликає дисипацію. Якщо зневажити ними, то можна одержати просту лінійну залежність між прискоренням і силою, що надає це прискорення. Однак при цьому не можна побачити різноманітні види поведінки об'єктів, які породжуються нелінійностями й не спостерігаються в лінійних системах.

В останні десятиріччя спостерігається активний розвиток нових теорій дослідження нелінійних динамічних систем, які дозволяють створювати більш точний опис поведінки нелінійних об'єктів. Але при математичному моделюванні таких об'єктів фахівці стикаються із труднощами й проблемами.

## 1.1 Проблеми моделювання нелінійної динаміки

Сучасній математиці й математичному моделюванню довелося зіштовхнутися з досить непростими ситуаціями, довелося в багатьох випадках перестати бути "зразком строгості". Поряд з аналітиками, які роблять "те, що можна, і так, як потрібно", з'явився великий загін фахівців із прикладної математики, яким доводиться робити "те, що потрібно, так, як можна", і широко використовувати результати комп'ютерного моделювання.

За це довелося досить дорого заплатити. Фахівці з математичного моделювання й нелінійної динаміки зіштовхнулися з тими ж труднощами й проблемами, які стоять перед дисциплінами, що вивчають надскладні об'єкти. Звернемо увагу на деякі з них.

**Труднощі виділення параметрів порядку.** Поява й широке впровадження комп'ютерів породило ілюзію, що "чим більше врахуємо, тем кра-

ще". (Це те саме що й думка, що "усе суттєво"). При цьому побудову моделі складного явища часто порівнювали зі складанням мозаїки. Провал декількох великих дослідницьких проектів показав, що так діяти не можна. Наприклад, американський проект "Біосфера", пов'язаний з моделюванням екологічних процесів, у якому брало участь близько 700 провідних спеціалістів, привів до результатів, що не допускають якої-небудь розумної інтерпретації.

Доводиться тим або іншим способом виділяти головні (ведучі) змінні, до яких підбудовуються всі інші ступені свободи. Уточнення математичного опису зазвичай пов'язане з побудовою ієрархії математичних моделей. Однак у моделюванні виділення параметрів порядку залишається скоріше мистецтвом, ніж наукою.

**Поява проблеми виміру.** Успіхи в математичному моделюванні складних систем, як правило, пов'язані з аналізом об'єктивних кількісних характеристик досліджуваних об'єктів. Але досвід розвитку математичного моделювання показав, що це є далеко не простою справою. "Слабкою ланкою" у безлічі аварій і катастроф виявляються люди, а не техніка. Саме їх дії й реакції варто було б описувати й прогнозувати у прикладних завданнях. Однак тут кількісний опис істотно відрізняється від стандартних приймань, використовуваних у природознавстві. Суб'єктивні фактори доводиться часто враховувати за допомогою тестів, опитувань, аналізу інших непрямих даних.

**Акцент на якісному описі системи.** При дослідженні об'єкта величезну роль відіграє виявлення тенденцій, виникнення нових якостей у поведінці. При цьому в багатьох випадках несуттєвими виявляються кількісні характеристики досліджуваних об'єктів, а якісні революційні перегони навпаки служать предметом пильної уваги.

Саме "аналіз якостей", а не чисел, став основним лейтмотивом безлічі розділів математики, що народилися в ХХ ст. – топології, теорії катастроф, деяких теорій у нелінійній динаміці.

**"Інформаційний джунгли".** У безлічі ситуацій прийнято скаржитися на недолік інформації, необхідної для конкретного аналізу, прийняття відповідальних розв'язків і т.д. Однак нелінійна динаміка найчастіше зустрічається із прямо протилежною ситуацією. Не ясно, що робити із уже зібраною інформацією, що слід виділити й уточнити, а що "забути". Типові приклади дають дані, що надходять із супутників, із сейсмічних станцій, метеорологічні спостереження. Величезні масиви інформації в цих важливих сферах дуже часто не дають ні розуміння досліджуваних процесів, ні можливостей для їхнього прогнозу. Величезні обсяги даних взагалі ніколи не аналізувалися. Інакше кажучи, упорядкування інформації, виділення в ній "параметрів порядку", аналіз питань, які можна задати, володіючи цією інформацією, виходять на перший план у багатьох додатках нелінійної динаміки.

### ***Вибір масштабу.***

Проблема пов'язана з тим, що масштаби змін параметрів (діапазони) встановлюються апріорно, наприклад, вибір частотного діапазону, допустимої точності виміру й т.п. При неправильно обраному масштабі можна не виявити важливі явища, наприклад, сплески. У такій ситуації дослідник бачить те, що можна, а не те, що потрібно.

### ***Визначення розмірності.***

Всі звикли користуватися геометрією Евкліда, яка оперує довжиною, шириною й висотою, тобто характеризується трьома вимірами. Однак така геометрія не дозволяє осягти сутність неправильних форм, що всюди зустрічаються в природі. Евклідова математика не дозволяє описати дерево, хмару, гори й багато чого іншого.

Із чисто практичних міркувань ми, дивлячись на карту доріг, розуміємо, що насправді дорога тривимірна, але її висота нас мало цікавить.

Однак, якщо ставити питання розмірності серйозніше, то в деяких випадках відповідь стає неочевидною. Наприклад, можна поставити таке запитання [2, 3]: А скільки вимірів має клубок мотузки? І виявиться, що відповідь залежить від рівня сприйняття.

З величезної відстані клубок представляється не більш ніж точкою з нульовою розмірністю. Наближаючись, можна помітити, що він подібний сфері й, таким чином, характеризується вже трьома вимірами. Ще ближче стає помітною сама мотузка й об'єкт здобуває один вимір, скручений таким чином, що задіється тривимірний простір. Просуваючись далі, до більш дрібних, видимим тільки під мікроскопом деталям, виявимо наступне: мотузка складається зі скручених тривимірних протяжних об'єктів, а ті, у свою чергу, – з одномірних волокон, речовина яких розпадається на частки з нульовими вимірами.

Отже, чисельний результат вимірів залежить від відношення об'єкта до спостерігача. Саме це ілюструють математичні традиції.

Парадоксальні результати аналізу розмірності (топології) були отримані також (в 70-і роки ХХ століття) при спробі виміряти довжину берегової лінії Великобританії. Виявилось, що зі зменшенням одиниці виміру довжина берегової лінії зростає й при використанні гранично малої величини розмірності стає нескінченною.

Французький і американський математик Бенуа Мандельброт [2] зайнявся аналізом розмірностей, не покладаючись на досить неясні поняття «здалеку» і «ближче», які використовувалися при реальних вимірах об'єктів. Він порушив питання: А що спостерігається в проміжку?

Безперечно, провести строгу рису, при перетинанні якої клубок мотузки перетворюється із тривимірного об'єкта в одномірний, неможливо. Проте, Мандельброт по-новому глянув на проблему розмірності.



Він рухався від цілочисельних розмірностей 0,1,2,3... до того, що видалося неможливим, – до дробових вимірів.

Дробовий вимір дозволяє обчислювати характеристики, які не можуть бути чітко визначені іншим шляхом: ступені нерівності, переривчастості або нестійкості якого-небудь об'єкта. Наприклад, звивиста берегова лінія, незважаючи на незмірність її «довжини», має властиву тільки їй шорсткість. Мандельброт указав шлях до розрахунків дробових розмірностей, які одержали назву «фрактальних». Об'єкти із фрактальною розмірністю стали називати *фракталами*

## 1.2 Проблема детермінізму

Донедавна (до другої половини ХХ століття) у математиці й фізиці превалювала ідея Лапласа про повну зумовленість розвитку систем. Уважалося, що якщо знати початкові умови й математичний опис поведінки об'єкта, то можна визначити його стан на будь-якому проміжку часу.

Наприклад, якщо мова іде про механічну систему, то добре відомо, що завдання початкових умов – координат і імпульсів – однозначно визначає наступну її еволюцію. Саме тому, у часи переваги механістичного погляду на природу речей, з'явився відомий вислів Лапласа: «Дайте мені початкові умови, і я передбачу майбутнє світу».

Ця впевненість у правоті Лапласа й передбачуваності поведінки систем, описуваних класичною механікою, збереглася аж до самого останнього часу у свідомості більшості натуралістів. Однак дослідження останніх 30 років зробили справжню революцію в цій області й показали, що не все так просто й що детермінована механічна система може поводитися цілком непередбачувано. І навпаки, в основі нерегулярної, хаотичної поведінки часто лежить цілком детермінований опис.

У природі і у повсякденній практиці багато таких процесів, які на перший погляд виглядають цілком випадковими, а насправді є відбиттям хаотичної динаміки.

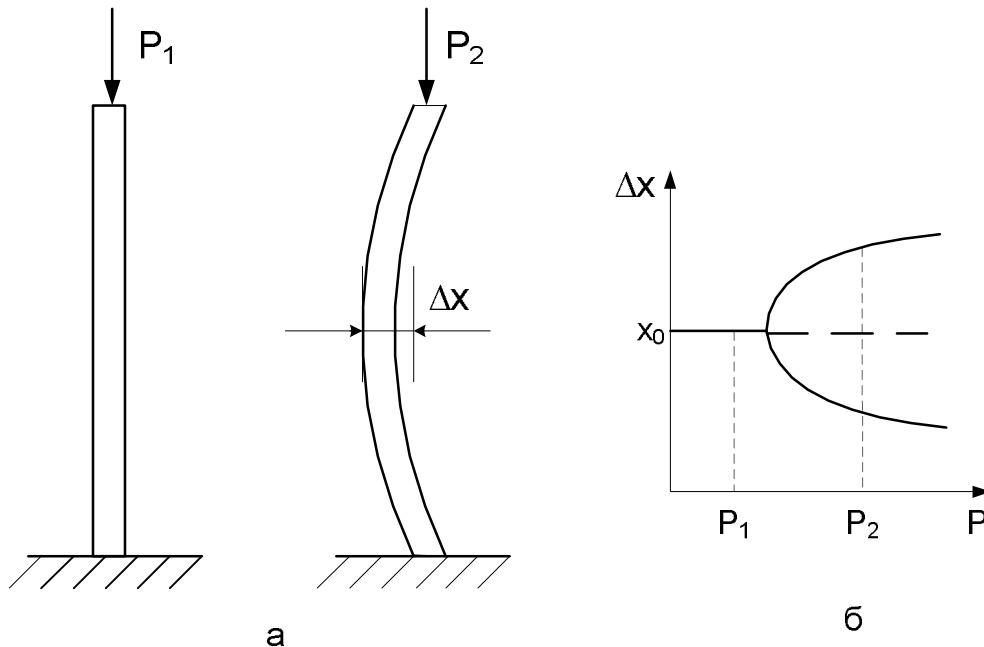
Як затверджують сучасні теорії, хаос присутній скрізь. Хаос виявляється і у капризах погоди, і в поведінці автомобілів у дорожній пробці, і в тому, як тече вода у струмку. Якби не були особливості конкретної системи, її поведінка підкоряється певним недавно відкритим закономірностям.

Встановлено, що зародження хаосу відбувається в результаті *біфуркацій* [4, 5, 6].

Суть біфуркації ілюструє приклад з навантаженням балки прямокутного перетину силою  $P$ , як показано на рисунку 1.1,а [3]. При збільшенні навантаження  $P$  балка стискується, але залишається прямолінійною. Од-

нак, починаючи з деякої критичної величини навантаження, вона вже не може залишатися в такому положенні й прогинається вправо або вліво. Їй доводиться "вибирати", куди прогнутися під дією випадкових факторів.

Якщо намалювати залежність максимального прогину балки від сили  $P$ , то виходить так, як показано на рис.1.1,б. Такі графіки називають біфуркаційними діаграмами.



а – прогин балки; б – біфуркаційна діаграма  
Рисунок 1.1 – Найпростіший приклад біфуркації

На біфуркаційній діаграмі показані стійкі гілки, які відображені суцільною лінією, та нестійкі гілки, які відображені пунктирною лінією. Нестійкі гілки можуть докорінно міняти хід стійких гілок. Стійка й нестійка гілки біфуркаційної діаграми можуть зіштовхнутися й анігілювати (взаємно знищуватися). Тоді в системі може відбутися катастрофічний стрибок або революційна зміна.

Особливістю біфуркацій є надзвичайна чутливість системи до умов, що визначають її стан. Дослідник хаосу Едвард Лоренц назвав цю властивість «ефектом метелика», коли незначний вплив на систему може мати великі і непередбачувані ефекти де-небудь в іншому місці і в інший час (від руху крил простого метелика може виникнути торнадо).

Після двох послідовних біфуркацій система стає хаотичною. У хаотичній динаміці система описується складною траєкторією, що представляє собою **дивний атрактор**. Назву «дивний» цей атрактор одержав у зв'язку з тим, що на відміну від звичайних атракторів (точка або замкнена крива) дивний атрактор має незамкнуту траєкторію, що свідчить про те, що система не має пам'яті про свій попередній рух.

### 1.3 Особливості дослідження систем із самоорганізацією

#### ***Визначення синергетики (Вікіпедія)***

**Синергетика** (англ. *Synergetics*) — міждисциплінарна наука, що займається вивченням процесів самоорганізації і виникнення, підтримки стійкості і розпаду структур (систем) різної природи на основі методів математичної фізики («формальних технологій»). Синергетичний підхід також застосовується при вивченні такої складної і неструктурованої системи, як мережний інформаційний простір.

Синергетика – це теорія самоорганізації в системах різноманітної природи. Вона має справу з явищами та процесами, в результаті яких в системі – в цілому – можуть з'явитися властивості, якими не володіє жодна з частин. Оскільки йдеться про виявлення та використання загальних закономірностей в різних галузях, тому такий підхід передбачає міждисциплінарність. Останнє означає співробітництво в розробці синергетики представників різних наукових дисциплін.

***Синергетика вивчає нелінійні відкриті дисипативні системи.*** Такі системи перебувають далеко від термодинамічної рівноваги і обмінюються енергією чи речовиною із навколишнім середовищем. Для перехідних процесів, що відбуваються в таких системах, не виконується закон неспадання ентропії, що призводить до утворення різноманітних дисипативних структур: автоколивань, автохвиль, в них може виникнути детермінований хаос.

Засновником синергетики вважається Герман Хакен, який ввів це поняття в своїй книзі «Синергетика».

#### ***Основні принципи***

Природні системи є нелінійними, вони мають різні види організації: динамічно стабільні системи, адаптивні системи і найскладніші – еволюціонуючі системи.

Зв'язок між ними здійснюється через хаотичний, нерівноважний стан систем сусідніх рівнів. Нерівноважності є необхідною умовою появи нової організації, нового порядку, нових систем, тобто – розвитку.

Коли нелінійні динамічні системи об'єднуються, нове утворення не дорівнює сумі частин, а *утворює систему іншої організації*.

Загальними для всіх еволюціонуючих систем є спонтанне утворення нових локальних станів, зміни на макроскопічному (системному) рівні, виникнення нових властивостей системи, етапи утворення, самоорганізації та фіксації нових якостей системи.

Системи, що розвиваються завжди відкриті (обмінюються енергією, інформацією та речовиною із зовнішнім середовищем), за рахунок чого і відбуваються процеси локальної впорядкованості і самоорганізації.

У сильно нерівноважних станах системи починають сприймати ті зовнішні фактори впливу, які вони б не сприйняли в більш рівноважному стані.

У нерівноважних умовах відносна незалежність елементів системи поступається місцем корпоративній поведінці елементів: поблизу стану рівноваги елемент взаємодіє тільки із сусідніми елементами, а в станах, далеких від рівноваги – відчуває всю систему цілком і узгодженість поведінки елементів зростає.

У станах, далеких від рівноваги, починають діяти біфуркаційні механізми – наявність точок біфуркації прискорює перехід до довготривалого режиму системи – атрактора. Заздалегідь неможливо передбачити, який з можливих атракторів займе система.

Синергетика так пояснює процес самоорганізації в складних системах:

1. Система повинна бути відкритою, тому що замкнена система відповідно до законів термодинаміки повинна в кінцевому результаті прийти до стану з максимальною ентропією і припинити будь-яку еволюцію.

2. Відкрита система повинна бути досить далека від точки термодинамічної рівноваги. У точці рівноваги складна система має максимальну ентропію і не здатна до якої-небудь самоорганізації. У положенні, близькому до рівноваги і без достатнього припливу енергії ззовні, будь-яка система з часом ще більше наблизиться до рівноваги і перестане змінювати свій стан.

3. Фундаментальним принципом самоорганізації є виникнення нового порядку і ускладнення систем через флуктуації (випадкові відхилення) станів їх елементів і підсистем. Такі флуктуації зазвичай придушуються в усіх динамічно стабільних і адаптивних системах за рахунок негативних зворотних зв'язків, що забезпечують збереження структури і близького до рівноваги стану системи. Але у складніших відкритих системах, завдяки притоку енергії ззовні і посилення нерівноважності, відхилення з часом зростають, накопичуються, викликають ефект *колективної поведінки елементів і підсистем* і, врешті-решт, призводять до «розхитування» колишнього порядку і через відносно короткочасний хаотичний стан системи призводять або до руйнування колишньої структури, або до виникнення нового порядку (*приклад – синхронізація метрономів*). Оскільки флуктуації носять випадковий характер, то поява будь-яких новацій у світі (еволюцій, революцій, катастроф) обумовлена дією суми випадкових факторів.

4. Етап самоорганізації настає тільки у випадку переважання позитивних зворотних зв'язків, що діють у відкритій системі, над негативними зворотними зв'язками. Функціонування динамічно стабільних, нево-

люціонуючих, але адаптивних систем – а це і гомеостаз живих організмів (стан рівноваги) і робота автоматичних пристроїв – ґрунтується на отриманні зворотних сигналів від рецепторів або датчиків щодо положення системи і подальшого коректування цього положення до вихідного стану виконавчими механізмами. У системі на шляху самоорганізації дані зміни не усуваються, а накопичуються і посилюються внаслідок загальної позитивної реактивності (реакції на зміни) системи, що може призвести до виникнення нового порядку і нових структур.

5. Самоорганізація в складних системах, переходи від одних структур до інших, виникнення нових рівнів організації матерії супроводжуються порушенням симетрії. При описі еволюційних процесів необхідно відмовитися від симетрії часу, характерної для повністю детермінованих і оборотних процесів в класичній механіці. Самоорганізація у складних і відкритих дисипативних системах, до яких належить і життя, і розум, а згідно з загальною теорією відносності і увесь Всесвіт у цілому <https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0> - cite\_note-4, призводять до необоротного руйнування старих і до виникнення нових структур і систем, що поряд з явищем зростання ентропії в закритих системах обумовлює наявність «стріли часу» в природі.

### ***Синергетика і мехатроніка***

Принципи синергетики лежать в основі побудови мехатронних систем (див. *мехатроніка*) – поєднання в одному агрегаті компонентів різної технічної природи (механічних, електротехнічних, комп'ютерних), які адаптивно взаємодіють із зовнішнім середовищем як єдиний функціональний і конструктивний організм.

Синергетичну інтеграцію в мехатроніці при проектуванні здійснюють двома способами:

1) шляхом функціонально-структурної інтеграції (ФС-інтеграції), задачею якою є пошук мехатронних структур, що реалізують задані функціональні перетворення за допомогою мінімального числа структурних блоків і суміжних з ними інтерфейсів на основі програмно-апаратних елементів або у вигляді механічних перетворювачів руху, електротехнічних або гідравлічних перетворювачів енергії;

2) структурно-конструктивної інтеграції (СК-інтеграції), що полягає в мінімізації конструктивних рішень для реалізації необхідної структури.

Синергетична інтеграція повинна виконуватися тільки на основі паралельного проектування, методологією якого (на відміну від традиційного послідовного) є одночасний і взаємопов'язаний синтез всіх компонент (традиційних і інтелектуального характеру) технічної системи мехатронного класу (*приклад – синергетичний зварювальний апарат*).

### ***Моделювання складних систем клітинними автоматами***

Клітинний автомат – дискретна модель, досліджувана в математиці, теорії обчислюваності, фізиці, теоретичній біології й мікромеханіці. Вона включає регулярні ґрати клітин, кожна з яких може перебувати в одному із станів, наприклад, 1 і 0. Ґрати можуть бути будь-якої розмірності. Для кожної клітини визначена множина клітин, названих сусідством, як показано на рисунку 1.2.

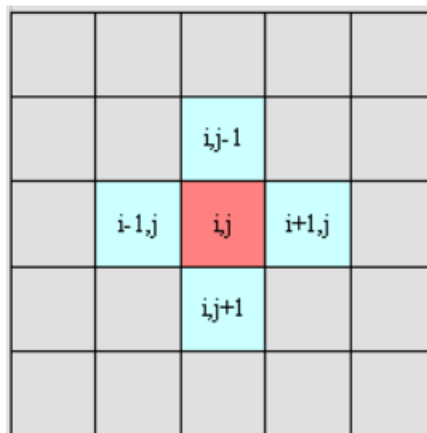


Рисунок 1.2 – Клітина з околицею фон Неймана

Приміром, сусідство може бути визначене як усі клітини на відстані не більш 2 від поточної. Для роботи клітинного автомата потрібне завдання початкового стану всіх клітин, і правил переходу клітин із одного стану в інший. На кожній ітерації, використовуючи правила переходу й стани сусідніх клітин, визначається новий стан кожної клітини. Зазвичай правила переходу однакові для всіх клітин і застосовуються відразу до всіх ґрат.

Клітинний автомат є математичним об'єктом з дискретними простором і часом. Кожне положення в просторі презентовано окремою кліткою, а кожний момент часу – дискретним тимчасовим кроком або поколінням. Стан кожного просторового локусу або клітки визначається дуже простими правилами взаємодії. Ці правила пропонують зміни стану кожної клітки в наступному такті часу у відповідь на поточний стан сусідніх кліток.

Вперше, ідея такого автомату відзначена у роботі Неймана у 1940-му році. Аж до кінця 60-х років ідея клітинних автоматів була забута й лише в 1970 р. Джон Конвей, математик Кембриджського університету, описав широко відомий нині двовимірний клітинний автомат, названий гра "Життя" ("Game of life").

### **Гра життя**

Гра розігрується на двовимірному масиві щоб уникнути крайового ефекту, згорнутому в тор. Кожна клітка може бути в одному із двох станів: клітка може бути "живою" (на екрані – чорною) або "мертвою" (на екрані – білою). Якщо клітка в поточний момент часу жива, то в наступному такті часу вона буде жива лише в тому випадку, якщо дві або три з восьми сусідніх кліток живі в поточному такті часу. А якщо ні, то клітка гине. Якщо

клітка мертва, то в наступному такті часу вона оживає тільки в тому випадку, якщо рівно 3 сусідні клітки живі в поточному такті часу. А якщо ні, то клітка залишається мертвою. Якщо в якості початкового стану встановити випадковий розподіл живих і мертвих кліток, запустити модель і простежити за її еволюцією, то можна побачити наступне.

Частина структур стабілізуються й не змінюються в часі, частину перетерплюють циклічні зміни, і, нарешті, деякі клітини розбудовуються, не повторюючись, практично необмежений час. Ці модуси поведінки структур у клітинному автоматі відповідають у диференціальних рівняннях, відповідно: фіксованій точці, граничному циклу й хаосу.

Таким чином, клітинні автомати представляють альтернативний диференціальним рівнянням шлях аналізу поведінки складних систем. Оскільки просторова підроздільність є іманентною властивістю клітинних автоматів, то вони сильні саме там, де диференціальні рівняння малоефективні або незастосовні. Немає іншого способу довідатися про еволюцію початкової конфігурації в грі «Життя», чим реалізувати гру.

Правила гри задають поведінку окремої клітки серед найближчих сусідів. Однак в ігровому клітинному середовищі без якого-небудь припису виникають стійкі явища більш високого порядку. Життя окремих кліток, які строго прив'язані до своїх позицій, породжує стійкі збурювання в середовищі. Збурювання можуть бути статичними, перебувати в стані осциляції або проявляти більш складну поведінку. Наприклад, рухатися й зустрічатися, породжуючи нові утвори з вигадливими властивостями.

Такі властивості або явища, які не були явно задані, але виникли в результаті процесів взаємодії вихідних складових, називаються емерджентними (дослівно, що виникають). Ці властивості створюються й підтримуються процесами усередині середовища. Як тільки процеси зникають – властивості також зникають, як зникає життя якщо розібрати організм на складові, а потім механічно спробувати зібрати воєдино.

Саме емерджентні властивості являються невід'ємною особливістю складних систем.

## 2 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФРАКТАЛЬНОЇ РОЗМІРНОСТІ

### 2.1 Поняття про фрактали

В 1890 г. італійський математик і логік Джузеппе Пеано побудував криву (криву Пеано), областю визначення якої є відрізок ( $\dim = 1$ ), а областю значень – квадрат ( $\dim = 2$ ). Було показано, яким чином одна точка, рухаючись безупинно по квадрату, може за нескінченний час пройти, принаймні, один раз через кожен точку квадрата і його границі. Крива Пеано, її потім охрестили «монстром», є безперервна крива, але ніде, у жодній точці, не диференціюється.

В 1904 р. шведський математик Хельга фон Кох, використовуючи ітерированні відображення, одержав фігуру, названу пізніше «сніжинкою Коха», особливістю якої є нескінченна довжина граничної лінії при обмежених розмірах самої сніжинки. Були отримані й інші монстри.

В 1919 р. німецький тополог Фелікс Хаусдорф розв'язав проблему розмірності кривих, що звиваються, приписавши їм дробову розмірність.

Систематичне вивчення незвичайних об'єктів було почато французьким математиком Бенуа Мандельбротом. Термін «фрактал» (англійське «fractal») був уведений Б. Мандельбротом в 1975 році. Він був отриманий від двох латинських дієслів: frangere – ламати й fractus – дробовий.

Відомі наступні визначення фрактала [8].

**Визначення 1.** *Фракталом* називається множина, розмірність Хаусдорфа-Безиковича (нижче буде показане обчислення цієї розмірності),  $d_{HB}$  якої строго більше її топологічної розмірності  $d_T$  ( $d_{HB} > d_T$ ).

Крива Пеано, маючи топологічну розмірність  $d_T = 1$  (одномірна крива), має фрактальну розмірність  $1 < d_f < 2$ .

**Визначення 2.** *Фракталом* називається структура, що складається із частин, які в якомусь змісті подібні цілому (саме самоподібні об'єкти стали основним інструментом Б. Мандельброта для дослідження фракталів).

Визначення 2 є строгим і найбільше точно відбиває суть фракталів, а саме їхню дробову розмірність. Однак, при всій правильності й точності, воно занадто обмежене, тому що виключає багато фракталів в різних технічних і фізичних задачах.

Визначення 2 містить ще одну відмітну ознаку: *фрактал виглядає однаково, у якому б масштабі його не спостерігати*.

Нижче ми більш докладно познайомимося із самоподібними об'єктами.

**Визначення 3.** *Фракталами* називаються масштабно-інваріантні множини, що володіють дробовою розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Це визначення поєднує відмітні ознаки фракталів, які дані визначеннями 1 і 2.



## 2.2 Фрактальна розмірність. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича

Коли мова йде про звичайні геометричні об'єкти: лінія, поверхня, куля, то їх топологічні розмірності  $d_T$  відомі і є цілими числами. На відміну від таких об'єктів фрактали складно розглядати як множину точок, вкладених у простір [8].

Розглянемо, як уводиться міра деякої множини точок  $G$ , вкладеного в простір при визначенні розмірності Хаусдорфа-Безиковича ( $d_{HB}$ ).

Простий спосіб виміряти довжину кривих, площу поверхні або об'єм тіла полягає в тому, щоб розділити їх на невеликі елементи – відрізки довжиною  $r$ , квадрати зі стороною  $r$  або на невеликі куби з ребрами  $r$  (рис. 3.1). Такий спосіб, наприклад, застосований папугою у відомому мультфільмі, коли він установив, що довжина удава становить 38 папуг.

З математичної точки зору ми застосовуємо деякий елементарний захід (мірило, величина чогось), як пробну функцію  $h(r) = r^d$ , де  $d$  – розмірність міри [8].

Нехай для деякої кривої  $\beta$  (рис. 2.1) довжиною  $L_0$ , отримано  $N(r)$  прямолінійних відрізків довжиною  $r$ , що апроксимують дану криву. Тоді, якщо  $r \rightarrow 0$ , одержимо довжину:

$$L = N(r) \cdot r \rightarrow L_0 r^1 \underset{r \rightarrow 0}{=} L_0. \quad (2.1)$$

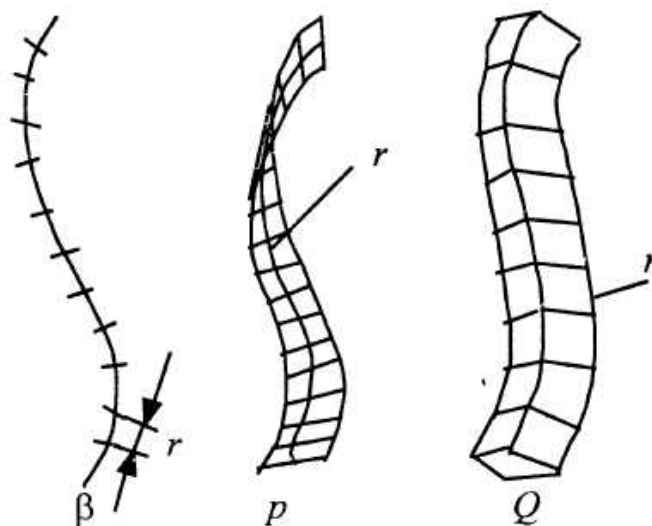


Рисунок 2.1 – Вимір «величини» різних множин точок за допомогою відрізків, квадратів і кубів з ребрами  $r$ .

У межі при  $r \rightarrow 0$  міра  $L$  стає рівною довжині кривої  $L_0$  й не залежить від  $r$ .

Множині точок кривої  $\beta$  можна поставити у відповідність і площу. Якщо  $N(r)$  – число квадратів,  $r^2$  – площа кожного з них, то площа кривої  $\beta$  визначається як:

$$S = N(r)r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_0 r. \quad (2.2)$$

Аналогічно об'єм  $V$  кривої  $\beta$  може бути знайдений як:

$$V = N(r)r^3 \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_0 r^2. \quad (2.3)$$

Зрозуміло, що для звичайних кривих  $\beta$  площа  $S$  й об'єм  $V$  звертаються в нулі при  $r \rightarrow 0$  і тоді єдиною мірою, яка представляє інтерес, є довжина кривої  $L$ .

Тепер перейдемо до поверхні  $p$  (рис. 2.1), для якої у якості міри множини точок візьмемо площу:

$$S = N(r)r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} S_0 r^0 = S_0. \quad (2.4)$$

Виникає питання: Чи можна для поверхні  $p$  у якості міри прийняти об'єм? Формально це можна представити у такий спосіб:

$$V = N(r)r^3 \xrightarrow{r \rightarrow 0} S_0 r^1. \quad (2.5)$$

При  $r \rightarrow 0$  об'єм для звичайної поверхні також дорівнює нулю.

Поставимо інше питання: Чи можна поверхні  $p$  поставити у відповідність яку-небудь довжину?

Формально ми можемо прийняти за таку довжину величину:

$$L = N(r) \cdot r \xrightarrow{r \rightarrow 0} S_0 \cdot r^{-1}, \quad (2.6)$$

яка розходиться при  $r \rightarrow 0$ .

Цей результат пояснює, що поверхню неможливо покрити кінцевим числом прямолінійних відрізків.

**Висновок:** єдиною мірою множини точок, що утворюють поверхню в тривимірному просторі є площа.

Однак існують «монстри», подібні кривій Пеано, сніжинці Коха та іншим, для яких потрібно узагальнити міру величини множини точок.

Дотепер, визначаючи міру величини множини точок  $G$  у просторі, ми вибирали деяку елементарну міру (пробну функцію)  $h(r)$ . Уведемо для пробної функції деякий геометричний коефіцієнт  $\gamma(d)$ , що буде залежати від виду пробної функції:

$$h(r) = \gamma(d)r^d, \quad (2.7)$$

Для прямолінійних відрізків, квадратів та кубів геометричний коефіцієнт приймаємо рівним  $\gamma(d)=1$ , однак для інших геометричних об'єктів він повинен бути перевизначеним. Так, наприклад, для кола  $\gamma(d) = \frac{\pi}{4}$ , для сфери

$$\gamma(d) = \frac{\pi}{6}.$$

Після вибору пробної функції  $h(r)$  множина  $G$  покривається  $N(r)$  пробними функціями (елементарними мірами). Міра цієї множини визначається сумою елементарних мір:

$$M_d = \sum_{i=1}^{N(r)} h(r) = \sum_{i=1}^{N(r)} \gamma(d)r^d. \quad (2.8)$$

Аналізуючи цей вираз, можна зробити висновок, що при  $r \rightarrow 0$  міра  $M_d$  дорівнює або нескінченності (при  $d=0$  одержуємо  $r^0=1$  і тоді  $M_d = \sum_{i=1}^{N(r)} \gamma(d)=\infty$ ) або нулю (при деякій величині  $d$  величина  $r \rightarrow 0$  наближається до нуля і сума стає рівною 0). Звідси випливає висновок, що момент переходу  $M_d$  з нуля в нескінченність відповідає деякому кінцевому значенню  $d$ .

*Розмірність Хаусдорфа-Безиковича*  $d_{HB}$  множини точок  $G$  є критична розмірність, при якій міра  $M_d$  змінює своє значення з нуля на нескінченність:

$$M_d = \sum_{i=1}^{N(r)} \gamma(d)r^d = \gamma(d)N(r)r^d \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } d > d_{HB} \\ \infty & \text{при } d < d_{HB} \end{cases}. \quad (2.9)$$

Прийнявши  $y(d) = 1$ , тобто, покривши множину точок прямолінійними об'єктами (відрізок, квадрат, куб) і прирівнявши  $M_d$  деякій скінченній величині, наприклад 1, одержимо:

$$N(r)r^{d_{HB}} = 1, \quad (2.10)$$

звідки розмірність Хаусдорфа-Безиковича визначимо по формулі:

$$d_{HB} = \frac{\ln(N(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}. \quad (2.11)$$

Якщо  $d_{HB}$  є дробовою, то розмірність Хаусдорфа-Безиковича будемо позначати  $d_f$  й називати *фрактальною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича*.

Тепер перейдемо до побудови й вивчення самоподібних фракталів.

### 2.3 Принцип самоподоби фракталів

Розглянемо кілька прикладів на побудову множин з використанням формули (2.11).

Візьмемо відрізок прямої одиничної довжини. Це можна зробити для будь-якого відрізка, прийнявши довжину цього відрізка за одиницю, тому що довжина в цьому випадку не має ніякого значення. Розділимо відрізок на  $N_1(r)$  рівних частин, де  $r$  – довжина кожної частини. Кожну частину можна вважати копією первинного відрізка, зменшеною в  $\frac{1}{r}$  раз. Очевидно, що  $N_1(r) \cdot r = 1$ . Назвемо первинний відрізок сегментом 0-ї ітерації (0-го покоління). Якщо використаємо формулу (2.11), то одержимо:

$$d_{HB} = \frac{\ln(N_1(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln(N_1(r))}{\ln(N_1(r))} = 1,$$

тобто первинний відрізок без додаткових перетворень має розмірність Хаусдорфа-Безиковича, що збігається з топологічною розмірністю.

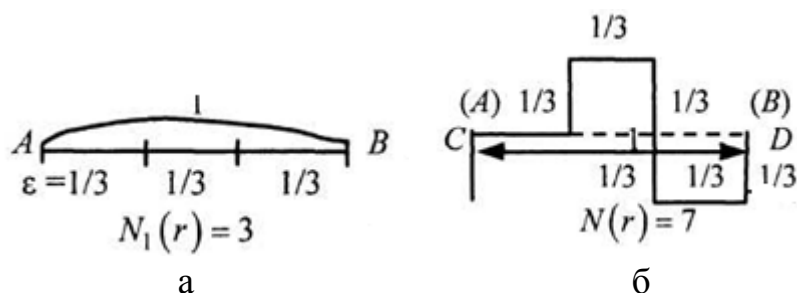
Зробимо тепер по-іншому: від первинного відрізка  $AB$ , тобто сегмента 0-ї ітерації (рис. 2.2, *a*), перейдемо, наприклад, до твірної 1-ї ітерації

самоподібного фрактала  $CD$ , де число сегментів дорівнює 7, а довжина кожного відрізка як і раніше дорівнює  $r = \frac{1}{3}$  (рис. 2.2, б).

Якщо тепер використаємо формулу (2.11), то одержимо:

$$d_{HB} = \frac{\ln(N(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 7}{\ln 3} = \frac{1,94}{1,1} = 1,81 = d_f.$$

Таким чином, величина  $d_f = 1,81$  (фрактальна розмірність самоподібного фрактала твірної  $CD$ ) показує, що крива  $CD$  в 1,81 разів «більш звивиста» на відрізку  $AB$ , чим сам відрізок  $AB$ .



*a* – сегмент 0-ї ітерації; *б* – сегмент 1-ї ітерації

Рисунок 2.2 – Побудова утворюючої самоподібного фрактала з  $r = \frac{1}{3}$ ,  $N(r) = 7$

Можна провести й зворотну процедуру, викидаючи, наприклад, частину відрізків довжини  $r$  із сегмента  $AB$ . У цьому випадку розмірність твірної буде менше розмірності сегмента  $AB$ , тобто  $d_f \in [0,1]$ .

Таким чином, побудову самої фрактальної множини (самоподібного фрактала) роблять послідовним використанням сегмента  $i$ -ї ітерації для твірної  $(i+1)$ -ітерації. При  $i \rightarrow \infty$  одержимо граничну (фрактальну) множину.

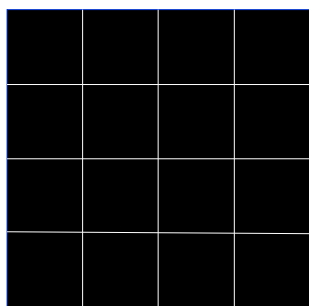
Аналогічний алгоритм використовується і для двовимірних об'єктів, наприклад, квадратів. Візьмемо квадрат одиничної площі (квадрат 0-ї ітерації) і, розділивши кожную сторону на  $N_1(r)$  рівних частин довжиною  $r$ , одержимо  $N_2(r)$  квадратів, подібних первинному, але таких, що мають сторону в  $\frac{1}{r}$  раз менше за первинну (рис. 2.3,а). Сформуємо твірну 1-ї ітерації самоподібного фрактала, викидаючи з первинного квадрата  $N_3(r) \in [1, N_2(r)]$  квадратів, як показано на рисунку 2.3, б:

$$r = \frac{1}{4}, N_1(r) = 4, N_2(r) = 16, N_3(r) = 10.$$

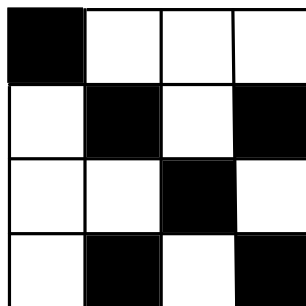
Якщо тепер визначити число копій первинного квадрата у твірній 1-ї ітерації, то це число дорівнює:  $N(r) = N_2(r) - N_3(r) = 6$ .

Знайдемо фрактальну розмірність одержаної множини:

$$d_f = \frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 6}{\ln 4} = \frac{1,79}{1,39} = 1,29.$$



а



б

а – квадрат 0-ї ітерації,  $N_2(r) = 16$ ; б – твірна для фрактала  $N(r) = 6$   
Рисунок 2.3 – Побудова фрактала для двовимірного об'єкта

Аналогічну процедуру можна робити над геометричними об'єктами розмірності  $n = 3$ .

Із проведеного аналізу випливає, що для того, щоб знайти розмірність самоподібного фрактала, необхідно визначити число елементарних заходів (пробних функцій)  $N(r)$  твірної 1-ї ітерації, обчислити коефіцієнт подоби  $r$  та використати формулу (2.11).

Наведені принципи використані для побудови деяких фракталів, які стали класичними.

## 2.4 Класичні фрактали

Прикладами класичних фракталів є сніжинка Коха, килим Серпинського, губка Менгера, пил Кантора й інші [8, 9].

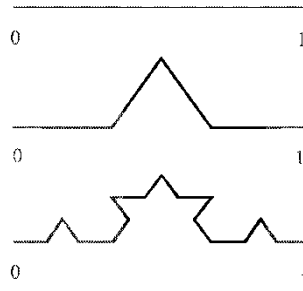
**Сніжинка Коха** являє собою замкнену криву, складену із однакових фракталів, кожний з яких будується на стороні рівностороннього трикутника. Процедuru побудови розглянемо на прикладі однієї зі сторін трикутника. Вона виконується для кожної із сторін.

Нехай  $K_0$  – первинний відрізок (одна сторона трикутника). Розділимо його на 3 частини й заберемо середню частину. Замість середньої частини додамо два нових відрізки тієї ж довжини так, щоб у центрі відрізка утворювався новий (маленький) рівносторонній трикутник, але без підста-

ви. У результаті одержимо нову множину  $K_1$  (рис. 2.4). Дану процедуру можна виконувати багаторазово над кожним з відрізків, одержуючи все нові й нові множини  $K_2, K_3$  і т.д. У результаті на  $n$ -му кроці ітераційного процесу одержимо сніжинку Коха (рис. 2.5).

Оскільки  $N = 4$ ,  $r = \frac{1}{3}$ , то розмірність такого фрактала дорівнює:

$$d_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618.$$



$a - K_0; \quad б - K_1; \quad в - K_2$

Рисунок 2.4 – Послідовність побудови фрактала «сніжинка Коха»

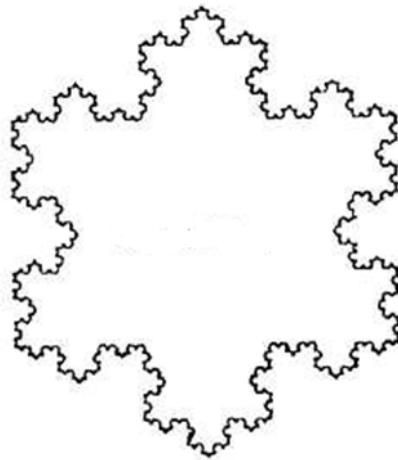


Рисунок 2.5 – Вигляд сніжинки Коха

Особливістю даного фрактала є нескінченна довжина граничної кривої. Дійсно, довжина кривої множини  $K_1$  становить  $l_1 = \frac{4}{3}$ , довжина кривої

множини  $K_2$  становить  $l_2 = \frac{4^2}{3^2}$ , а на  $n$ -му кроці ітераційного процесу

довжина кривої буде становити  $l_n = \frac{4^n}{3^n}$ . При  $n \rightarrow \infty$  довжина граничної кривої дорівнює  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} \rightarrow \infty$ .

Алгоритми побудови таких фракталів, як килим Серпинського, пил Кантора й інших, багато в чому подібні з алгоритмом побудови сніжинки Коха.

Принцип побудови килима полягає в розбивці деякої замкненої області (первинної множини) на непересічні підобласті (непересічні підмножини), які обов'язково містять внутрішню підобласть, і наступним видаленням саме внутрішньої підобласті. Процедура ітеративно повторюється з кожною із залишених підмножин. Найбільш ілюстративне подання цього процесу видно на прикладі килима, побудованого на базі прямокутного трикутника (рис. 2,6), хоча килим можна будувати, побравши за основу квадрат або іншу плоску фігуру.

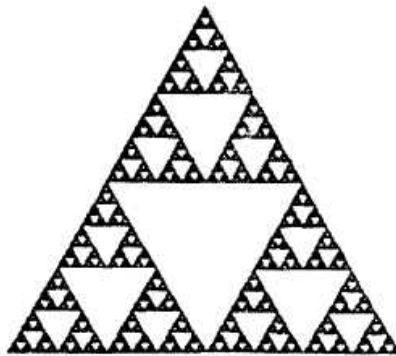


Рисунок 2.6 – Килим Серпинського

Нехай первинною множиною  $S_0$  є рівносторонній трикутник разом з областю, яку він замикає. Розіб'ємо його на чотири менші трикутники й вилучимо внутрішній трикутник без замикаючих його сторін. Одержимо множину  $S_1$ . Виконаємо аналогічну операцію над трикутниками, що залишилися. У результаті отримаємо множину  $S_2$ . Продовжуючи ітераційний процес, на  $n$ -му кроці одержимо множину  $S_n$  (рис. 2.7). Гранична множина й утворює килим Серпинського. Враховуючи те, що коефіцієнт подоби  $r = \frac{1}{2}$ , а кількість елементів, що беруть участь в ітераційному процесі,  $N = 3$ , розмірність фрактального килима, побудованого на основі трикутника, дорівнює:

$$d_f = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585.$$



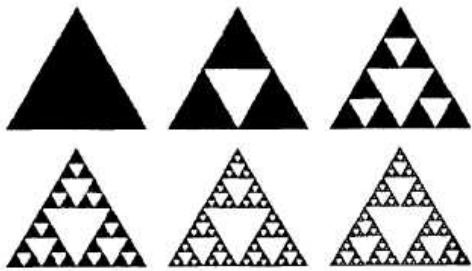


Рисунок 2.7 – Послідовність побудови килима Серпинського

Так само як і сніжинка, даний килим має свою особливість, а саме те, що гранична множина  $S$  має площу нульової міри.

Дійсно, на першому кроці видаляється  $1/4$  площі первинного трикутника, на другому кроці – 3 трикутника площею  $(1/4)^2$  від первинного і т.д. Оскільки гранична величина площі становить:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 3^{i-1} \frac{1}{4^i} = 1,$$

то міра  $d$  дорівнює нулю.

До множин нульової міри ставиться й *пил Кантора* (фрактальний пил). Принцип побудови цієї множини полягає в наступному. На першому кроці відрізок одиничної довжини  $[0,1]$  розбивається на три частини й видаляється середня частина. На наступних кроках із відрізків, що залишилися, знову видаляються центральні (рис. 2.8). Граничною множиною є пил Кантора.



Рисунок 2.8 – Послідовність побудови пилу Кантора

Вважаючи те, що  $N = 2$ , а коефіцієнт подоби  $r = \frac{1}{3}$ , розмірність такого фрактала дорівнює:

$$d_f = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309.$$

Підрахуємо довжину інтервалів, що викидаються. На першому кроці викидається інтервал довжиною  $1/3$ . На другому кроці викидаються два інтервали довжиною  $(1/3)^2$  від довжини первинного одиничного відрізка. На  $n$ -му кроці викидаються  $2^{n-1}$  інтервалів, кожний з яких має довжину  $\frac{1}{3^n}$ .

Таким чином, загальна довжина інтервалів, що викидаються, для граничної множини складатиме:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2^{i-1} \frac{1}{3^i} = 1.$$

## 2.5 L-системи тертл-графіки

Для розглянутих вище класичних фракталів існує характерний єдиний принцип побудови – додаються або викидаються окремі лінії або області. Процес повторюється багаторазово (*ітераційно*). Цей процес ліг в основу *L-систем*, які дозволяють створювати окрему, достатню велику групу самоподібних фракталів. За допомогою *L-систем*, в яких використовується підсистема графічного виводу за назвою тертл-графіка (від англійського turtle – черепаха), зазвичай будують зв'язані й незв'язані фрактальні множини – сніжинки, килими, криві, а також фрактальні дерева, рослини, русла рік і т.п [9].

Сутність тертл-графіки полягає в тому, що точка, яка зображує рух черепашки, рухається по екрану монітора прямолінійно, дискретними кроками, залишаючи або не залишаючи свій слід. Після кожного переміщення вона може повернутися на деякий кут у ту, або іншу сторону, або продовжити рух знову по прямій. Так утворюється безперервна або розривна дискретна лінія на екрані. Зображуюча точка може повернутися на кілька кроків назад, не перериваючи свій слід, і почати рух у новому напрямку. У цьому випадку відбувається розгалуження траєкторії руху.

Зображуюча точка рухається по командах, які задаються кодovими словами. У кожній точці екрана задаються три *параметри*:  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$  ( $x, y$  – координати точки,  $\alpha$  – напрямок руху). Кодове слово складається із вказівок переміщення на один крок із залишенням або незалишенням сліду, а також збільшенням або зменшенням напрямку руху на деякий кут  $\Theta$ , відкриттям гілок, закриттям гілок.

*L*-систему утворюють алфавіт, ініціатор (слово ініціалізації, аксіома) і набір правил, що породжують, визначають перетворення аксіоми для організації ітераційного процесу.

Алфавіт складається з набору окремих символів. Кожний символ являє собою мікрокоманду, яка повинна відтворювати рух зображуючої точки. Наприклад:

- $F$  – переміститися вперед на один крок, прорисовуючи слід;
- $b$  – переміститися вперед на один крок, не прорисовуючи слід;
- [ – відкрити гілку;
- ] – закрити гілку;
- + – збільшити кут  $\alpha$  на величину  $\Theta$ ;
- – зменшити кут  $\alpha$  на величину  $\Theta$ .

З елементів алфавіту можна створювати слова ініціалізації (аксіоми). Наприклад, L-система, яка дозволяє намалювати на екрані рівносторонній трикутник, має наступну аксіому:

$$F + +F + +F$$

при напрямку руху

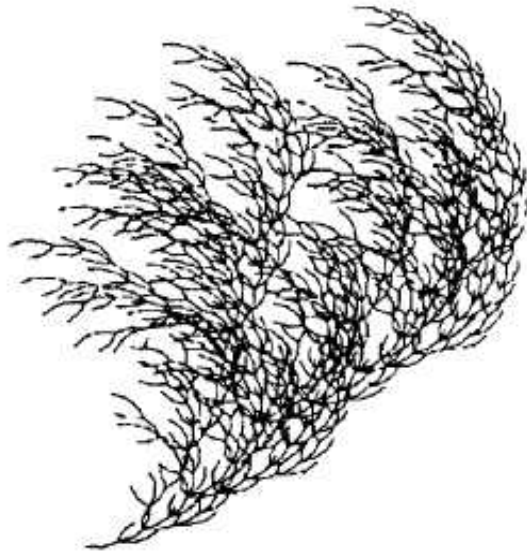
$$\Theta = \frac{\pi}{3}.$$

Згідно з командою  $F$  виконується рух на один крок. Зображуюча точка має первинний напрямок руху під кутом  $\Theta = \frac{\pi}{3}$ . По командам  $+ i +$  здійснюється поворот на кут  $2\frac{\pi}{3}$ . Наступна команда  $F$  пропонує рух ще на один крок. Команди  $+ i +$  повертають зображуючу точку знову в позитивному напрямку на кут  $2\frac{\pi}{3}$ . Остаточна команда  $F$  замикає трикутник.

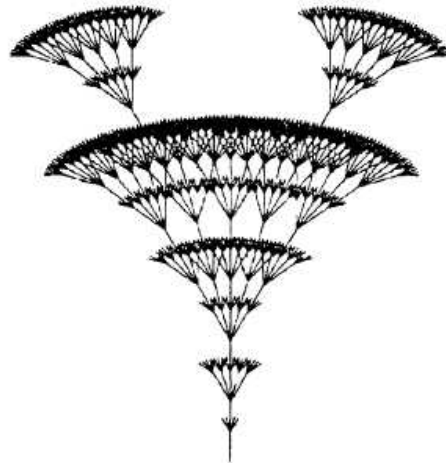
Окремі команди  $F$  в аксіомі можна замінити групами мікрокоманд.

Породжує правило – це різновид рекурсивної процедури. Наприклад, якщо в наведеній вище аксіомі команду  $F$  замінити правилом  $newf = F - F + +F - F$ , то зображуюча точка при русі по екрану намалює сніжинку Коха. Глибина рекурсії показує, яку кількість ітерацій по заміні команд групою мікрокоманд необхідно виконати.

За допомогою мікрокоманди розгалуження здійснюється побудова дерев і рослин. Породжуючі правила дозволяють багаторазово виконувати розгалуження не тільки від лінії основного напрямку руху, але й від побудованих раніше гілок. На рисунках 2.13-2.14 зображені фрактали, побудовані за допомогою мікрокоманди розгалуження.



*Рисунок 2.13 – Кущ після 4-х ітерацій*



*Рисунок 2.14 – Квітка після 3-х ітерацій*

## **2.6 Система ітерованих функцій**

Як відзначалося раніше, процедура побудови фракталів являє собою ітераційний процес – перетворення однієї множини в іншу. На кожному кроці перетворення реалізується алгоритм, який можна представити у вигляді наступної схеми [9]:

$$E_i = T_i(E_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Тут  $T_i(E_{i-1})$  – перетворення, виконувані на  $i$ -м кроці над множиною  $E_{i-1}$  ( $E_0$  – первинна компактна множина).

На кожному кроці ітераційного процесу виконуються однотипні перетворення. У загальному ж випадку на кожному кроці можуть виконуватися різні перетворення, обумовлені таким способом:

$$T(E) = \prod_{j=1}^m T_j(E). \quad (2.18)$$

Перетворення виду (2.18) називаються *перетвореннями Хатчинсона*. Перетворення Хатчинсона дозволяють будувати різноманітні фрактали за рахунок вибору елементарних перетворень  $T_i(E)$ .

Слід усвідомити, що якщо перетворення  $T_i(E_{i-1})$  визначені заздалегідь, то одержуваний результат зовсім не залежить від вибору первинної компактної множини  $E_0$ . Крім того, слід взяти до уваги, що не будь-які перетворення  $T$  породжують фрактали.

Якщо, наприклад, перетворення Хатчинсона отримано з використанням двох афінних перетворень:

$$T(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) \cup T_2(\mathbf{x}),$$

де

$$T_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,373 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,353 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,187 \\ 0,137 & 0,8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,1 \end{bmatrix},$$

то можна побудувати фрактал за назвою «лист» (рис. 2.15).

Якщо використовувати чотири афінних перетворення виду:

$$T_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,255 & 0 \\ 0 & 0,255 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,3726 \\ 0,671 \end{bmatrix},$$

$$T_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,255 & 0 \\ 0 & 0,255 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,1146 \\ 0,2232 \end{bmatrix},$$

$$T_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,255 & 0 \\ 0 & 0,255 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,6306 \\ 0,2232 \end{bmatrix},$$

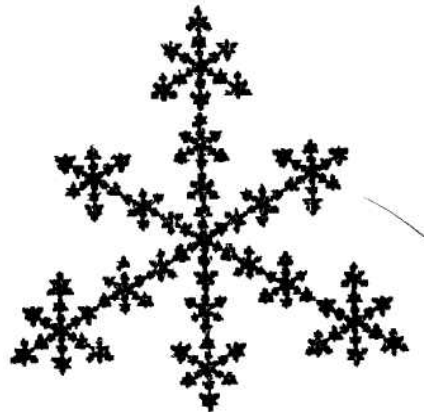
$$T_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,370 & -0,642 \\ -0,642 & 0,370 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,6356 \\ -0,061 \end{bmatrix},$$

то одержимо фрактал за назвою «кристал» (рис. 2.16).



*Рисунок 2.15 – Фрактал «листя»*

Задача побудови граничної множини  $E$  з первинної компактної множини  $E_0$  з використанням ітераційного процесу із заданим перетворенням  $T_i(E)$  є прямою задачею. Її особливістю є те, що результат перетворення визначається тільки коефіцієнтами афінного перетворення і не залежить від вибору первинної множини  $E_0$ .



*Рисунок 2.16 – Фрактал «кристал»*

У той же час можна поставити зворотну задачу, а саме: визначити сукупність відображень, для яких задана множина є первинною. Зворотна задача значно складніше прямої, однак має величезне прикладне значення, зокрема, в області стиску зображень.

Необхідність стиску зображень обумовлена різними факторами, основними з яких являються:

- розвантаження каналів зв'язку й, відповідно, зниження собівартості передачі даних;
- економія пам'яті комп'ютерів при архівації зображень і ін.

## 2.7 Фрактали на комплексній площині

У системах автоматичного керування процес керування здійснюється ітераційно – наступний стан системи залежить від поточного (і навіть попередніх):

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.19)$$

Якщо функція керування містить нелінійності, то процес зазвичай представляється на комплексній площині, щоб можна було відобразити уявне коріння рівняння  $n$ -го ступеня.

Ідея використання комплексних чисел замість дійсних у дослідженні фрактальних об'єктів була висунута Мандельбротом [10, 11]. Він поставив задачу спостереження ітераційного процесу на комплексній площині. Процес Мандельброта математично представляється вираженням:

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c. \quad (2.20)$$

де  $c = x + iy$ .

Цей процес реалізується у наступній послідовності. Вибравши довільне число  $z_0$ , зведемо його у квадрат і додамо константу  $c$  для того, щоб одержати  $z_1$ . Потім повторимо обчислення для того, щоб одержати  $z_2$ ,  $z_3$  і т.д.

Почнемо з найпростішого із можливих значень константи  $c$ , а саме із значення  $c=0$ . Тоді при кожній ітерації обчислюється точний квадрат числа:  $z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow z_0^8 \dots$ . Для цієї послідовності є три можливості:

1. При  $z < 1$  числа виходять усе меншими й меншими, їх послідовність наближається до нуля. Таким чином, нуль є атрактором цього процесу, тому що всі точки менше 1 рухаються до нього.

2. При  $z > 1$  числа стають усе більшими й більшими, прагнучи до нескінченності. Таким чином, для цього процесу атрактором є нескінченність.

3. При  $z=1$  точки перебувають на відстані 1 від нуля. Їхні послідовності лежать на границі двох областей притягання, у цьому випадку атрактор розташований на окружності одиничного радіуса із центром у нулі.

Таким чином, площина ділиться на дві зони впливу, а границею між ними є просто окружність.

Зовсім інша картина спостерігається тоді, коли ми виберемо ненульове значення  $c$ , а, наприклад, комплексне значення  $c = -0.12375 + 0.56508i$ .

Тут для послідовності  $z_0 - z_1 - z_2 \dots$  також є три перерахованих вище можливостей, але внутрішній атрактор вже не є нулем, а границя вже не є гладкою, тобто відрізняється від окружності. Ця границя показана на рисунку 2.17. Вона сильно зламана, причому під лупою вона буде виглядати так само зламаною, як і без лупи.



Рисунок 2.17 – Границя басейну із однією притягуючою точкою

Саме таку границю Б. Мандельброт назвав *фрактальною структурою*. Вона нагадує лінію морського берега.

Змінюючи значення  $c$ , Мандельброт в 1975 р. одержав множину точок, які визначали границю переходу від стійкості до хаосу.

Однією з характерних рис цієї границі є її самоподоба. Якщо глянути на кожний з її фрагментів, то можна виявити, що та сама форма зустрічається в різних місцях і має різні розміри.

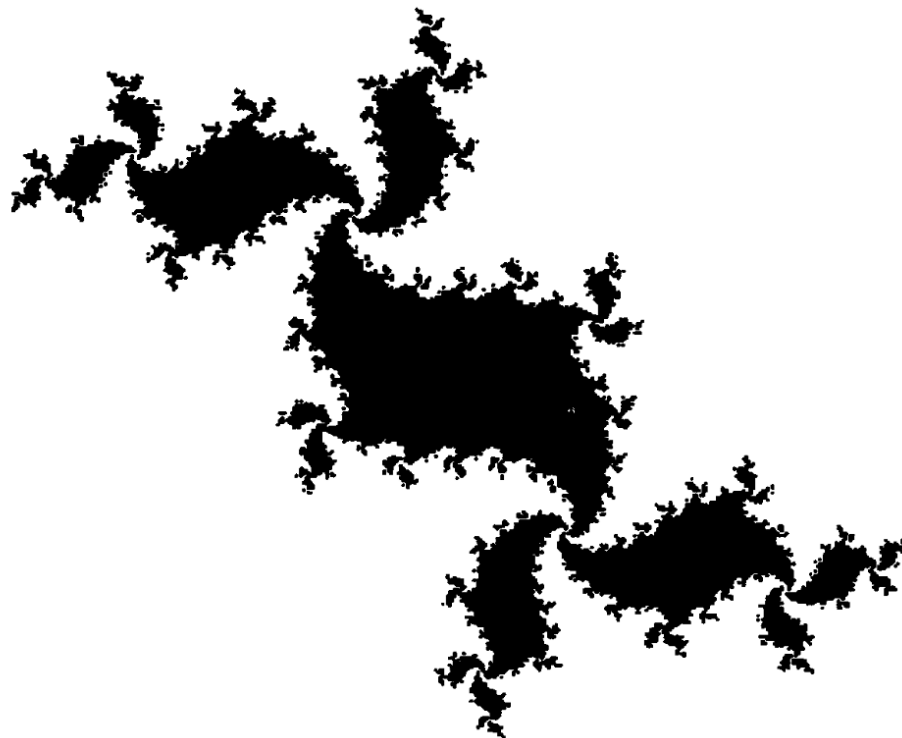
Аналогічні множини були отримані Жюліа ще в 1924 р. Але в множинах Жюліа величина  $c$  була прийнята постійною. Процес ітераційних обчислень для кожної величини  $c$  тривав доти, поки  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  не виходила з кола радіусом 2. Представлена на рисунку 2.18 множина Жюліа побудована при  $c = -0,20 + 0,75i$ .

Тут множина Жюліа являє собою не єдину деформовану окружність, а складається з нескінченного числа деформованих окружностей, що утворюють, однак, зв'язну множину. Внутрішні точки цієї множини притягаються не до однієї нерухливої точки, а до множини точок.

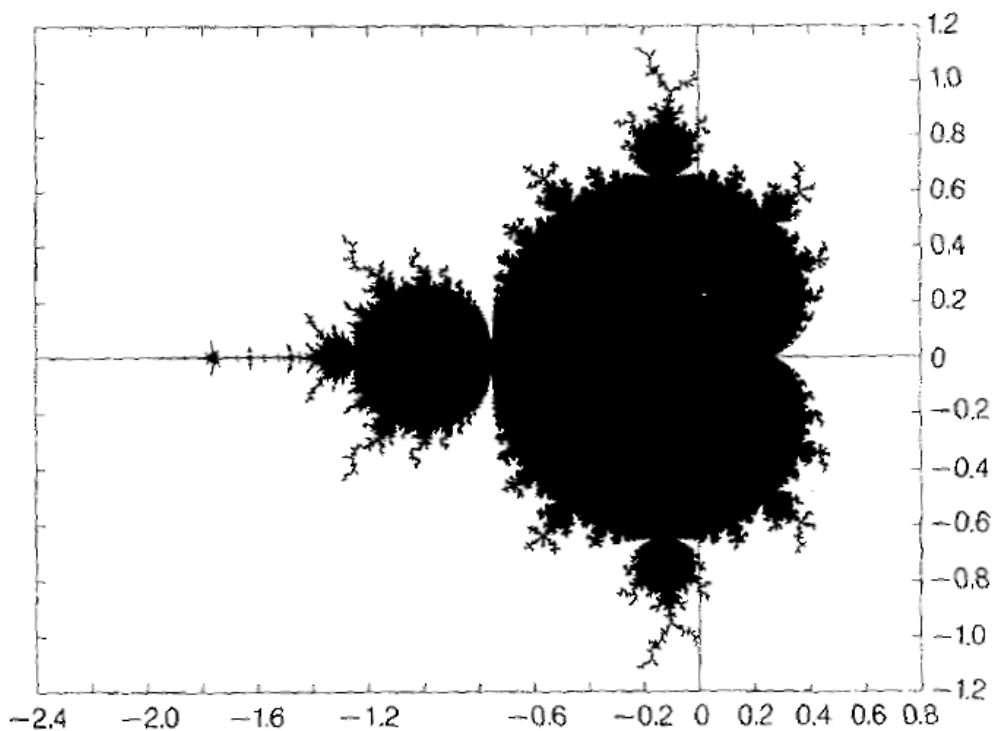
При цьому величина  $c$  визначає вид множини Жюліа. Правило, по якому множина Жюліа буде ухвалювати той або інший вид, визначає гра-



ниці  $M$  множини Мандельброта. Ця границя показана на рисунку 2.19 як зафарбована чорним кольором частина комплексної  $s$ -площини.

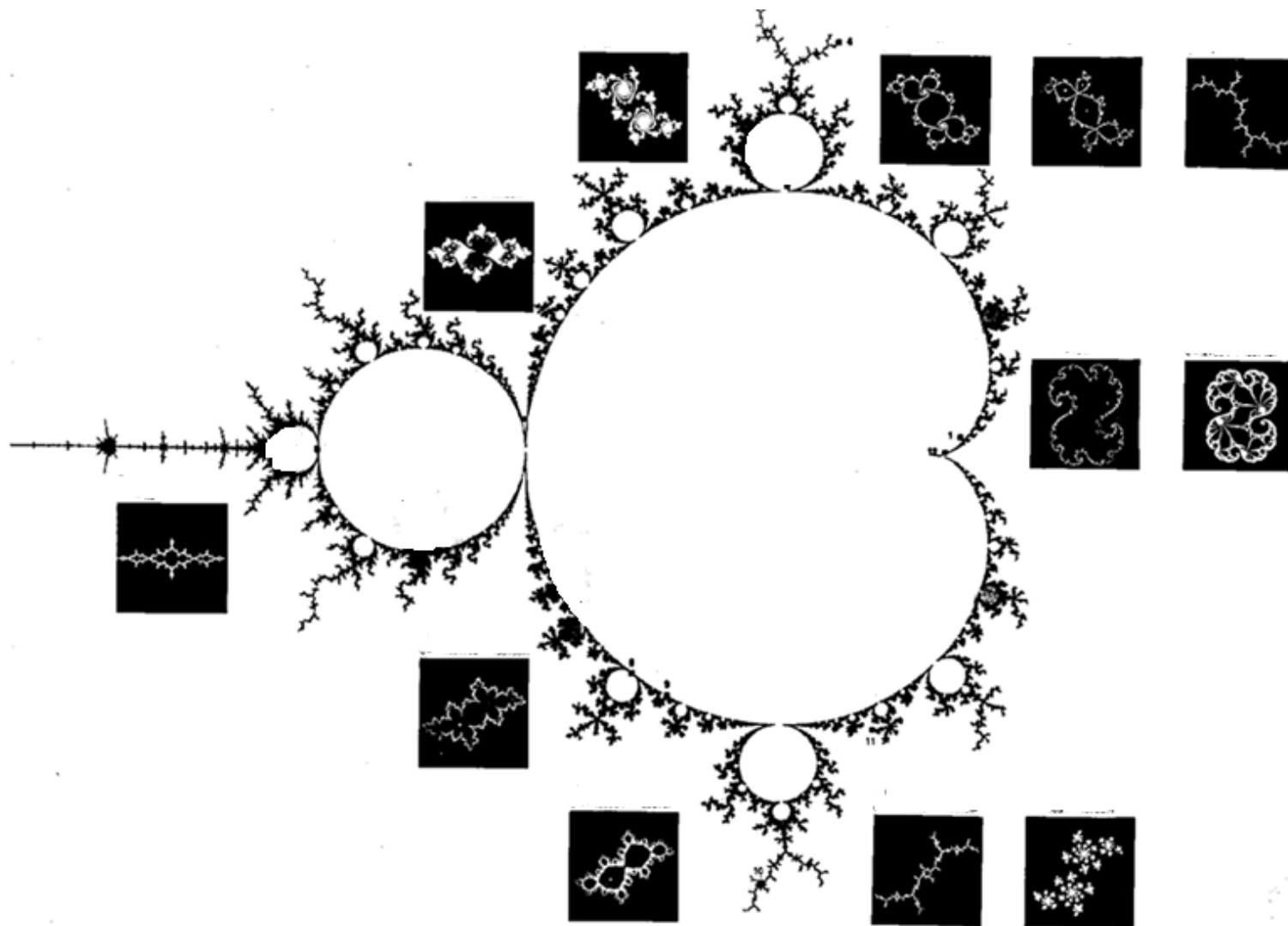


*Рисунок 2.18 – Множина Жюліа для  $c = -0,20 + 0,75i$*



*Рисунок 2.19 – Вид границі множини Мандельброта на комплексній площині*

На рисунку 2.20 показані зміни виду множини Жюліа в різних граничних точках множини  $M$ .



*Рисунок 2.20 – Зміни виду множини Жюліа по границі множини Мандельброта*

Кожне комплексне число  $c$  або належить чорній структурі  $M$ , або не належить. Відповідні множини Жюліа процесу  $x \rightarrow x^2 + ic$  суттєво різняться. Вони являють собою зв'язні структури, коли  $c$  лежить усередині  $M$ , і розсипаються на нескінченне число шматочків, коли  $c$  лежить зовні  $M$ .

Уявимо собі деякий шлях у  $c$ -площині, що починається усередині  $M$  і закінчується поза ним. Якщо змінювати  $c$ , рухаючись уздовж цього шляху, то якісні зміни відбуваються з відповідними множинами Жюліа тоді, коли  $c$  перетинає границю  $M$ : вони, начебто вибухнувши, перетворюються в хмару з нескінченного числа точок. У цьому змісті границя множини  $M$  визначає момент *математичного фазового переходу* для множин Жюліа відображення  $x \rightarrow x^2 + ic$ .

## 2.8 Випадкові фрактали

Усі об'єкти, з якими зустрічається людина, можна розділити на штучні й природні. Усі штучні об'єкти мають, як правило, чіткі форми, у той час як форми природніх об'єктів здебільшого є «неправильними». Тому такі утвори, як гірські хребти, берегові лінії або хмари не мають подоби (у змісті незмінності) при лінійному збільшенні або зменшенні. Тут принцип самоподоби необхідно розглядати зі статистичних позицій, тобто поняття «подібний» необхідно тлумачити як «схожий».

Окрему групу, призначену для моделювання природніх об'єктів, утворюють випадкові фрактали. Наочним прикладом випадкового фрактала є рандомізована сніжинка Коха. Для її одержання досить на кожному кроці ітераційного процесу обертати всередину або назовні вершину нового споруджуваного трикутника (рис. 2.21).

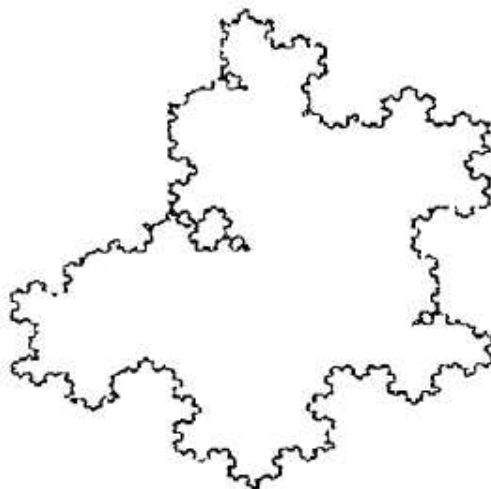


Рисунок 2.21 – Рандомізована сніжинка Коха

Фрактальна розмірність побудованої в такий спосіб кривої залишається попередньою. Гранична крива рандомізованої сніжинки Коха може служити моделлю, наприклад, контуру хмари або острова. Аналогічний підхід може бути реалізований при побудові фракталів за допомогою *L-систем*, коли випадковим чином реалізується, наприклад, операція розгалуження. Побудовані в такий спосіб дерева, рослини або сніжинки будуть мати більш природний вид. У наведених прикладах рандомізації зазначають лише окремі параметри ітераційного процесу, у той час як сам алгоритм (система ітерованих функцій) побудови фракталів залишається незмінним – детермінованим.

Очевидно, що ітераційний процес також може бути випадковим. Для того, щоб у результаті цього процесу здійснювалася побудова саме фракталів, необхідно забезпечити виконання принципу статистичної самоподоби. Властивістю статистичної самоподоби є вінеровський процес (броунівський рух), що має нормальний закон розподілу.

Вінеровський процес є марковським («майбутнє» процесу не залежить від «минулого»), якщо значення процесу в *теперішній* момент часу залежить тільки від значень у попередній момент часу й величини приросту. Приклад вінеровського процесу показано на рисунку 2.22.

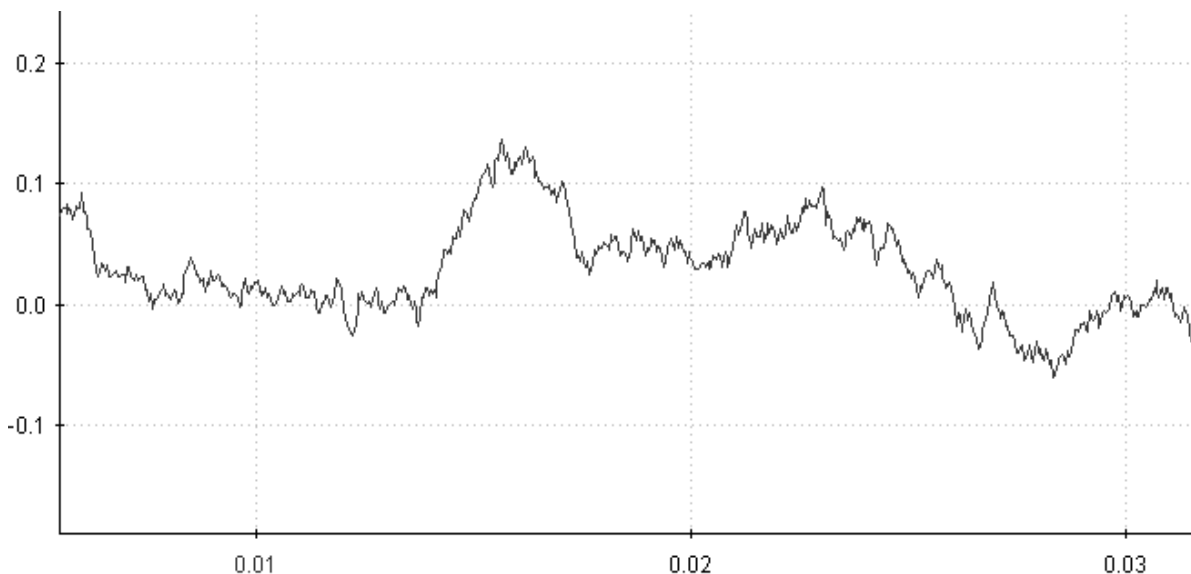


Рисунок 2.22 – Графік вінеровського процесу в часі

Говорячи формально, деяка змінна  $z$  підкоряється вінеровському процесу, якщо вона має наступні властивості [9].

*Властивість 1.* Зміна  $\Delta z$  протягом малого проміжку часу  $\Delta t$  задовольняє рівності:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.21)$$

де  $\varepsilon$  – випадкова величина, що підкоряється стандартному нормальному розподілу  $\varnothing(0,1)$ ,  $\sqrt{\Delta t}$ , – стандартне відхилення, що залежить від часу процесу.

*Властивість 2.* Величини  $\Delta z$  на двох малих проміжках часу  $\Delta t$  є незалежними.

З першої властивості випливає, що величина  $\Delta z$  має нормальний розподіл, у якого математичне очікування дорівнює нулю, стандартне відхилення рівне  $\sqrt{\Delta t}$ , а дисперсія рівна  $\Delta t$ .

Друга властивість означає, що величина  $Z$  підкоряється марковському процесу (незалежності одного розподілу від іншого).

Квадратний корінь виходить через те, що при аналізі марковського процесу дисперсії змінної в послідовні моменти складаються, а стандартні відхилення – не складаються. Якщо дисперсія змінної протягом одного року рівна 1,0, то дисперсія цієї змінної протягом двох років буде рівна 2,0, а через три роки – 3,0. У той же час стандартні відхилення змінних через два й три роки будуть рівні  $\sqrt{2}$  й  $\sqrt{3}$ , відповідно. Строго говорячи, не можна говорити, що стандартне відхилення змінної за один рік дорівнює 1,0. Слід говорити, що воно рівно «кореню квадратному з одиниці в рік». Це пояснює, чому величину невизначеності часто вважають пропорційною квадратному кореню із часу.

Прирости вінеровського процесу мають властивості статистичної самоподоби. Для них справедливо [9]:

$$\Delta X(\Delta t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{r}} \Delta X(r\Delta t), \quad (2.22)$$

або

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{r}} [X(t + r\Delta t) - X(t)]$$

для кожного  $r > 0$ .

Тут величина  $\sqrt{r}$  є коефіцієнтом статистичної самоподоби, а символ  $\stackrel{\Delta}{=}$  означає, що дві випадкові величини мають однакові диференціальні закони розподілу.

**Визначимо фрактальну розмірність вінеровського процесу.** Без втрати спільності вважаємо, що значення аргументу перебувають в інтервалі  $[0,1]$ . Розділимо цей інтервал на  $n$  рівних підінтервалів однакової довжини  $\Delta t = \frac{1}{n}$  й у такий же спосіб розділимо вертикальну вісь на підінтервали довжини  $\Delta X(t) = \frac{1}{n}$ , як показано на рисунку 2.23.

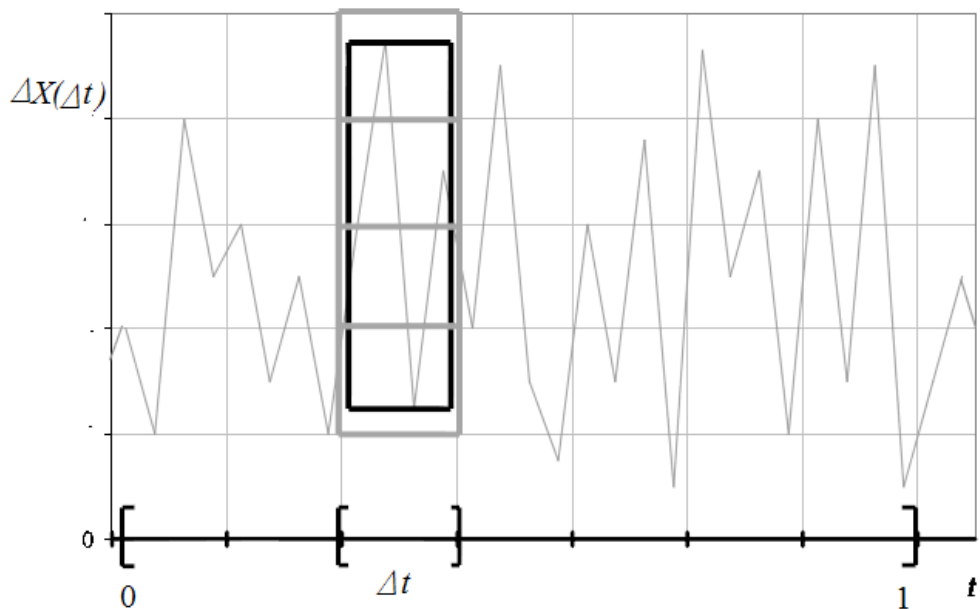


Рисунок 2.23 – Клітинне покриття функції на підінтервалах

Вираження  $\frac{|\Delta X|}{\Delta t}$  буде служити в якості оцінки числа квадратів  $N$  розміру  $\Delta t$ , необхідних для покриття частини графіка  $y = X(t)$ , розташованої над одним підінтервалом. Це число пропорційне  $\sqrt{\Delta t}$  – відхиленню (багато хто вважають квадратний корінь із часу величиною невизначеності).

Усього є  $\frac{1}{\Delta t}$  таких підінтервалів, тому загальне число квадратів пропорційно  $\Delta t \cdot \sqrt{\Delta t} = \Delta t^{\frac{3}{2}}$ , тобто:

$$N(\Delta t) \approx \Delta t^{\frac{3}{2}}.$$

Таким чином, фрактальна розмірність вінеровського процесу дорівнює:

$$d_f = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln N(\Delta t)}{\ln \Delta t} = 1,5.$$

Найбільш зручно фрактальний вінеровський процес визначити за допомогою параметра Хьорста  $H$  ( $0 < H < 1$ ), який характеризує рівень самоподоби для випадкового процесу. При  $H = \frac{1}{2}$  фрактальний вінеровський процес збігається із класичним вінеровським процесом.

У такому випадку фрактальна розмірність і параметр  $H$  зв'язуються вираженням:

$$d_f = - \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\lg(N(\Delta t))}{\lg(\Delta t)} = 2 - H. \quad (2.23)$$

Як видно із (2.23), змінюючи параметр  $H$ , можна змінювати фрактальну розмірність.

Візуально можна відзначити наступні зміни в реалізаціях фрактального вінеровського процесу для різних значень  $H$  (рис. 2.24). Збільшення  $H$  приводить не тільки до зменшення  $d_f$ , але й до зменшення дисперсії процесу, тобто він стає менш «порізаним», більш гладким, з невеликими відхиленнями від математичного очікування. Змінюючи  $H$ , можна змінювати вид випадкового фрактала.

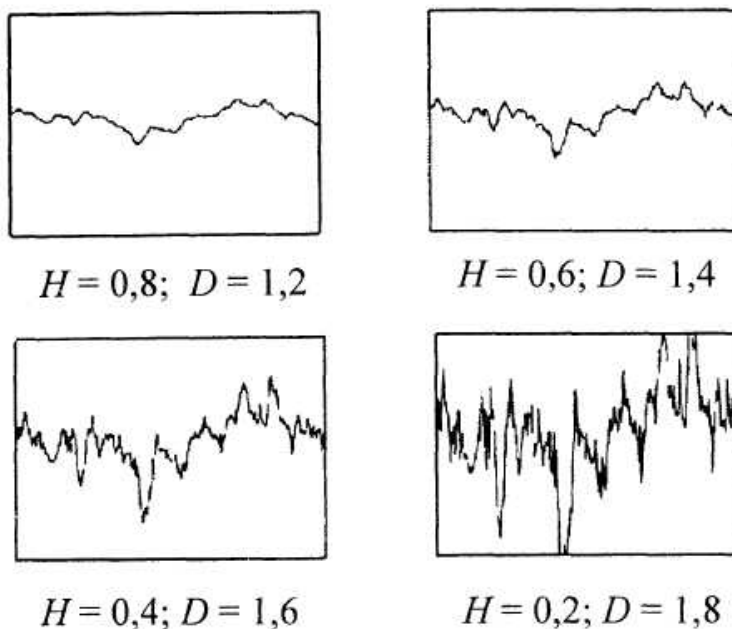


Рисунок 2.24 – Реалізації фрактального вінеровського процесу при різних значеннях  $H$

### **Застосування випадкових фракталів для моделювання**

Розглянуті вище теоретичні положення визначають сутність випадкових фракталів. Одномірні класичні й фрактальні вінеровські процеси можливо і не мають самостійного значення при моделюванні природних утворів, однак є основою для побудови двовимірних процесів, за допомогою яких можна моделювати природні ландшафти – гірські хребти, лісову поверхню, хвилювання моря і т.д.

Двовимірний фрактальний вінеровський процес (поверхня) визначається в такий спосіб: – це функція двох аргументів  $X(x, y)$ , що володіє наступними властивостями:

- 1)  $X(0,0) = 0$  і майже всі реалізації процесу безперервні;
- 2) Приросту процесу  $X(x, y)$  відповідає:

$$\Delta X = X(x + \Delta x, y + \Delta y) - X(x, y),$$

де  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ ,  $\Delta y = y(t_2) - y(t_1)$  – є випадковою величиною, що має нормальний інтегральний закон розподілу.

Фрактальна розмірність двовимірного вінеровського процесу дорівнює:

$$d_f = 3 - H.$$

На рисунках 2.25-2.27 наведені приклади фрактальних поверхонь (функція  $\max\{X, 0\}$ ), що відповідають двовимірним вінеровським процесам з різними значеннями параметра  $H$  [9]. Змінюючи значення  $H$ , можна моделювати найрізноманітніші типи земної поверхні – від рівнин до гірських хребтів.

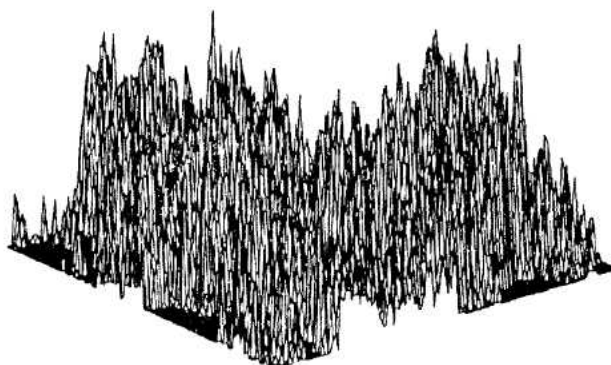


Рисунок 2.25 – Двовимірний фрактальний вінеровський процес при  $H = 0,2$

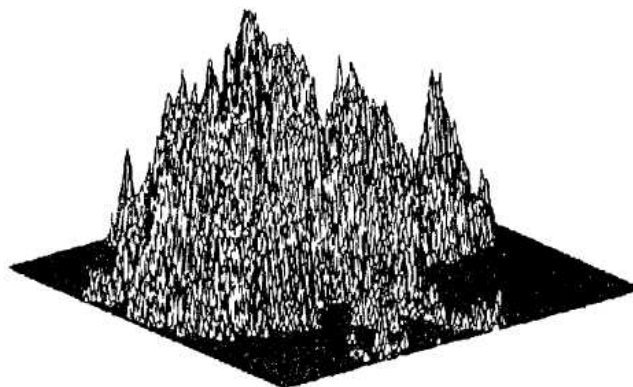


Рисунок 2.26 – Двовимірний фрактальний вінеровський процес при  $H = 0,5$



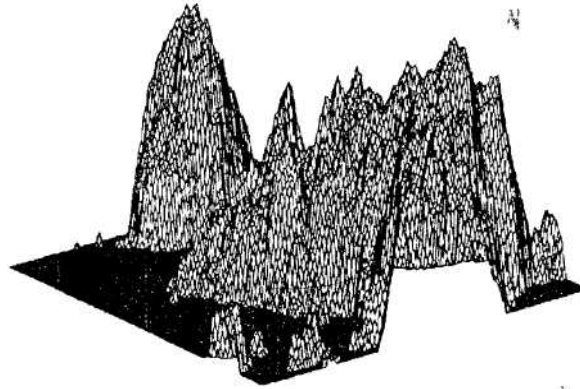


Рисунок 2.27 – Двовимірний фрактальний вінеровський процес:  $H = 0,8$

Для моделювання одномірних і двовимірних фрактальних вінеровських процесів більш ефективно використання перетворення Фур'є. При цьому випадковий процес починає мати деяку пам'ять, що дозволяє досягти регулярності на моделі процесу.

Моделювання ґрунтується на тому, що спектральна щільність фрактального вінеровського процесу апроксимується статечною функцією

$\frac{1}{f^{2H+1}}$ , тобто:

$$S_x(f) \approx k \frac{1}{f^{2H+1}}, \quad (2.24)$$

яка убиває при збільшенні частоти  $f$ .

Основна ідея моделювання фрактального вінеровського процесу полягає в довільному завданні спектральної щільності  $S_x(f)$ , яка зберігає необхідні властивості у відповідності з (2.24), і наступному застосуванню зворотного перетворення Фур'є.

Моделювання здійснюється на кінцевому інтервалі зміни аргументу функції  $X(t)$ , тобто розглядається функція  $X_T(t)$ . Оскільки використовуються засоби обчислювальної техніки, то в підсумку формується числова послідовність  $X_T[nT_0]$ , яка є дискретною апроксимацією  $X_T(t)$ :

$$X_T[nT_0] = X_T(t) \Big|_{t=nT_0}, \quad n = \overline{0, N-1},$$

де  $T_0$  – крок дискретизації процесу,  $N$  – число дискретних відліків.

Практична реалізація моделювання виконується в такий спосіб.

Спочатку синтезується дискретне перетворення Фур'є для числової послідовності  $X_T[nT_0]$  у вигляді:

$$X_n = \frac{K}{n^{H+0,5}}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (2.25)$$

Залежність (2.25) визначається в даній формі в силу справедливості співвідношення (2.24). Оскільки для кожного значення  $n$   $X_n$  є довільним комплексним числом, то коефіцієнт  $K$  можна задати у формі:

$$K = \nu e^{2\pi ju}, \quad (2.26)$$

де  $\nu$  – значення нормально розподіленої випадкової величини з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією,  $u$  – значення рівномірно розподіленої випадкової величини на відрізку  $[0,1]$ .

Далі до синтезованого комплексного вектора  $X_n$  застосовується зворотне дискретне перетворення Фур'є. Результатом цього перетворення є шукана числова послідовність  $X_T[nT_0]$ .

При побудові випадкових фрактальних поверхонь двовимірних фрактальних вінеровських процесів використовуються ті ж процедури, що й в одномірному випадку. На відміну від одномірного випадку замість вектора  $X_n$  спочатку синтезується двовимірна матриця  $X_{n,k} : n, k = \overline{0, N-1}$ , що задовольняє умові:

$$|X_{n,k}|^2 = \frac{k}{(n^2 + k^2)^{H+1}}, \quad (2.27)$$

а потім застосовується двовимірне зворотне перетворення Фур'є.

## 2.9 Методи визначення фрактальної розмірності тимчасових рядів

Існують кілька підходів до визначення фрактальної розмірності:

- 1) клітинна розмірність;
- 2) поточечна розмірність;
- 3) кореляційна розмірність;
- 4) інформаційна розмірність.

**Клітинна розмірність.** Використовується при дослідженні розмірності ліній і площ з фрактальною природою.

Її суть полягає в тому, що лінія або площа накривається сіткою з розміром гнізда  $\delta$ . Потім підраховується кількість кліток  $N(\delta)$ , що накривають досліджувану лінію або площу. Далі величина  $\delta$  кілька раз змен-

шується й для кожного нового значення  $\delta$  визначається відповідна кількість кліток  $N(\delta)$ . На рисунку 2.28 наведена ілюстрація цього процесу, запозичена із [12].

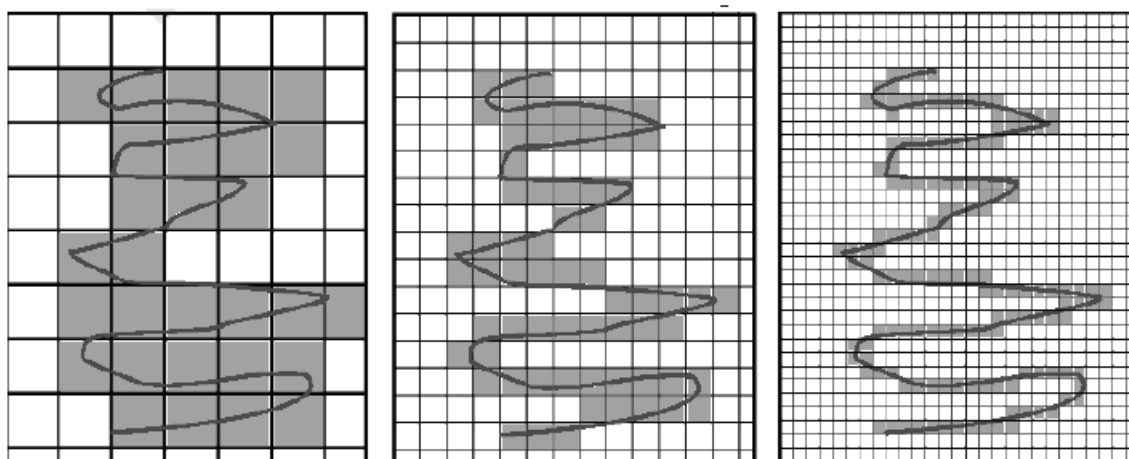


Рисунок 2.28 – Покриття кривої лінії клітками з різними розмірами  $\delta$

У результаті цього одержуємо декілька пар значень  $N(\delta) - \delta$ , для яких обчислюємо логарифми.

Тепер побудуємо систему координат у подвійному логарифмічному масштабі  $\lg N(\delta) \propto \lg \delta$ , нанесемо точки з координатами  $[\lg N(\delta), \lg \delta]$  на площині та проведемо пряму лінію через ці точки, як показано на рисунку 2.29.

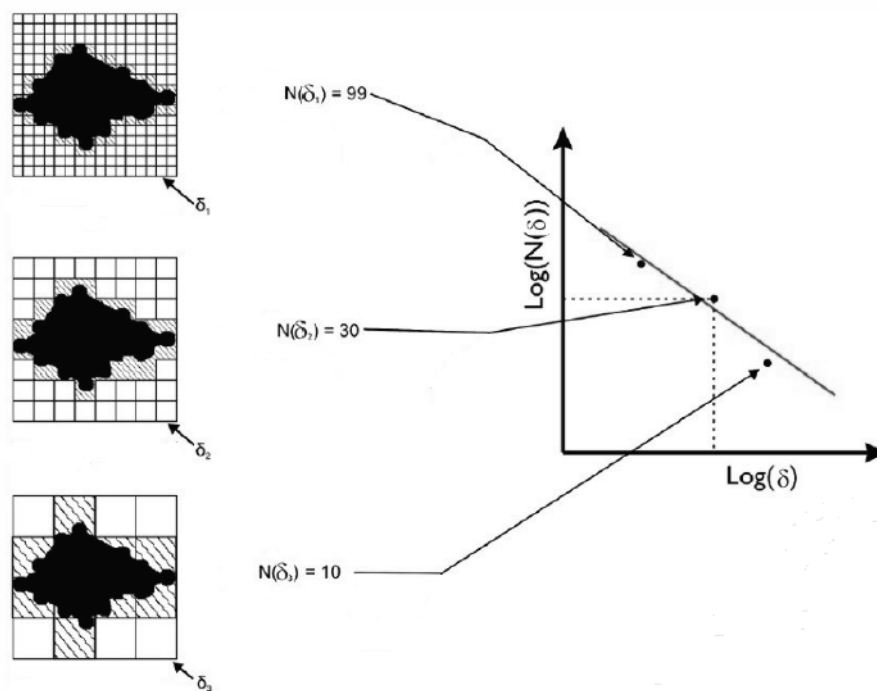


Рисунок 2.29 – Побудова графіку у системі координат з подвійним логарифмічним масштабом

Далі визначимо кут нахилу цієї лінії  $\alpha$ , як показано на рисунку 2.30. Клітинна фрактальна розмірність  $D$  представляється вираженням:

$$D = \operatorname{tg} \alpha . \quad (2.28)$$

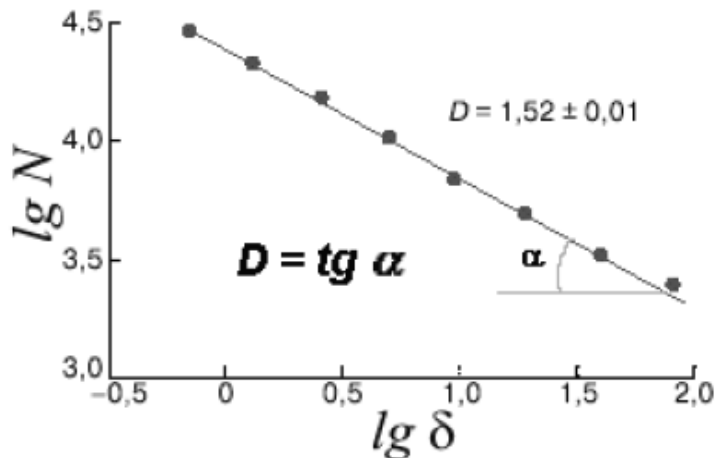


Рисунок 2.30 – Визначення клітинної фрактальної розмірності  $D$  по нахилу прямої лінії

**Поточечна (фрактальна) розмірність.** Розглянемо траєкторію у фазовому просторі протягом тривалого часу [14], наведену на рис. 2.31.

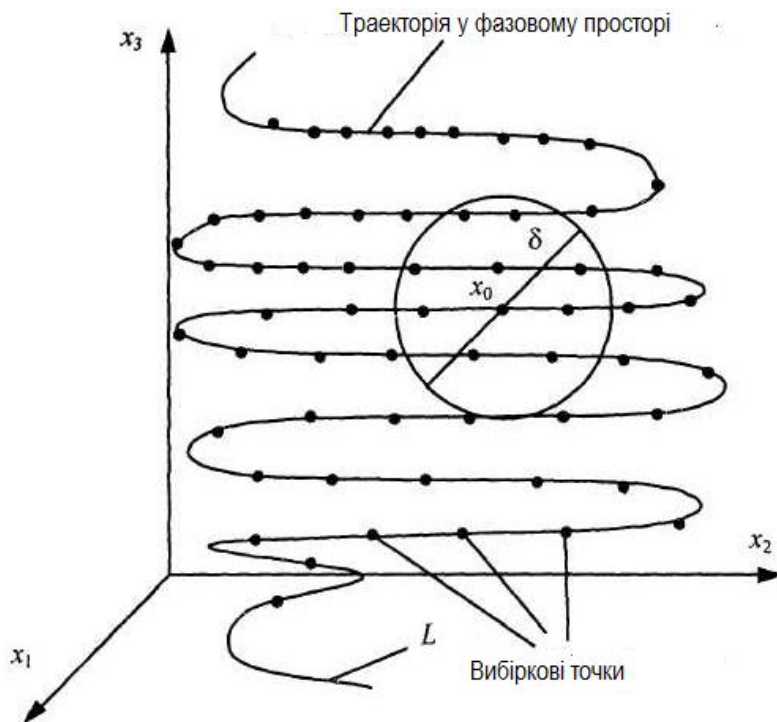


Рисунок 2.31 – Геометричні побудови для знаходження поточечної (фрактальної) розмірності

Проведемо довільним чином вибірку досить великого числа  $N_0$  точок на траєкторії. Опишемо навколо якої-небудь точки  $x_0$  на траєкторії сферу діаметра  $\delta$  (або куб з ребром  $\delta$ ) і підрахуємо число вибірових точок  $N(\delta)$ , що потрапили усередину сфери.

Імовірність того, що вибірова точка виявиться усередині сфери, визначається вираженням:

$$P(\delta) = \frac{N(\delta)}{N_0}, \quad (2.29)$$

де  $N_0$  – загальне число точок на траєкторії.

Розмірність траєкторії для деякої області точок  $\mathbf{x}^{(i)}$  фазового простору визначається вираженням:

$$d_{fp} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln P(\delta, x^{(i)})}{\ln \delta}. \quad (2.30)$$

Формула (2.30) відрізняється від загальної формули (2.11) по визначенню фрактальної розмірності, проте вираження (2.30) можна привести до вираження (2.11).

Нехай довжина всієї кривої  $L$  рівна 1 (це завжди можна допустити). Нехай  $r$  – відстань між окремими точками. Тоді добуток  $[N(r) \cdot r]$ , де  $N(r)$  – число точок, що потрапили в сферу, визначає довжину кривої  $L(\delta)$  в сфері діаметра  $\delta$ . При цьому добуток  $[N_0 \cdot r]$  визначає довжину всієї кривої  $L$ , тобто рівний 1.

Розглянемо відрізок  $\delta$  (діаметр сфери). Якщо знову прийняти довжину цього відрізка за 1, то число відрізків, що покривають довжину  $\delta=1$ , визначиться як  $1/r$ , у той же час число відрізків, що покривають  $L(\delta)$ , дорівнює:

$$N(r) \cdot r \cdot \frac{1}{r} = N(r).$$

Тоді:

$$d_{fp} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln \left( \frac{1}{r} \right)}$$

і ми одержуємо первинну формулу (2.11).

Як видно, тут знову використовувався основний принцип – принцип самоподоби фракталів. Але для випадкових траєкторій  $d_{fp}$  може залежа-

ти від множини точок  $\mathbf{x}^{(i)}$ , тому краще скористатися усередненою поточечною розмірністю.

Виберемо випадковим способом множини точок  $M < N_0$  і в кожній точці обчислимо  $d_{fp}(\mathbf{x}^{(i)})$ , після чого визначимо усереднену поточечну розмірність:

$$\overline{d_{fp}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M d_{fp}(\mathbf{x}^{(i)}). \quad (2.31)$$

**Кореляційна (фрактальна) розмірність.** Ця розмірність широко використовується для визначення міри впорядкованості рухів і є нижньою оцінкою хаусдорфової розмірності дивного атрактора [13].

На першому етапі визначається кореляційний інтеграл  $C(\delta)$  по формулі:

$$C(\delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N 1[\delta - \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|] \quad (2.32)$$

де  $1[z]$  – функція Хевісайда;  $\|\dots\|$  – яка-небудь норма.

Функція Хевісайда являє собою одиничну східчасту функцію, яка набуває значення 1 у момент  $z$ . Застосування функції Хевісайда дозволяє виявити момент, коли міра переходить із нуля до нескінченності.

Норма – це правило, яке означає, що сполученим алгебраїчним числам відповідає деяке раціональне число.

Фактично подвійна сума в (2.32) визначає число пар  $[\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}]$ , відстань  $\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|$  між якими не перевищує  $\delta$ . Передбачається, що  $\mathbf{x}^{(i)}$  – це вектор, який описує положення зображуючої точки  $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}(t_i)$  у фазовому просторі в момент часу  $t_i$ , де  $t_i = t_0 + iT$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $T$  – деякий заданий проміжок часу. При малих  $\delta$  кореляційний інтеграл  $C(\delta) \sim \delta^{d_{fc}}$ , тому кореляційну розмірність  $d_{fc}$  можна визначити по нахилу залежності  $\ln C(\delta)$  від  $\ln \delta$  :

$$d_{fc} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln C(\delta)}{\ln \delta}. \quad (2.33)$$

У випадку вивчення скалярної динамічної системи або однієї координати вектора стану  $\mathbf{x}$  фрактальну розмірність можна визначити за допомогою процедури Паккарда-Такенса.

Нехай  $x_i$  – реалізація однієї з координат фазового простору системи  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$ . Уведемо в розгляд новий фазовий простір (простір вкладення розмірності  $p$ ), точки якого визначаються векторами  $y_j^{(p)} = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+p-1}\}$ , сконструйованими з останніх значень величин  $x(j = 1, 2, \dots, n = N - p + 1)$ . При зміні  $t$  одержимо в цьому просторі траєкторію, що відтворює деяку множину, кореляційна розмірність якої  $d_{fc}^{(p)}$  може бути обчислена через кореляційний інтеграл:

$$C^{(p)}(\delta) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n 1(\delta - \|y_j^{(p)} - y_k^{(p)}\|). \quad (2.34)$$

Фрактальна розмірність визначається по нахилу залежності  $\ln C^{(p)}$  від  $\ln \delta$ , або:

$$d_{fc}^{(p)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln C^{(p)}(\delta)}{\ln \delta}. \quad (2.35)$$

Змінюючи розмірність  $p$  векторів  $y$ , проаналізуємо залежність  $d_{fc}$  від  $p$  (криву Паккарда-Такенса). Виявляється, що розмірність  $d_{fc}^{(p)}$  із ростом  $p$  збільшується. Однак якщо реєструємий сигнал є проявом детермінованого хаосу, то при якомусь  $p = p_0$  величина  $d_{fc}^{(p)}$  перестане зростати. Досягнуте при цьому значення  $d_{fc}^{(p)}$  ухвалюється за розмірність  $d_{fc}$  системи. Якщо ж ріст  $d_{fc}^{(p)}$  триває без насичення, то це свідчить про те, що спостережуваний сигнал є шумовим.

**Таким чином, звичайний випадковий процес можна розглядати як рух системи на аттракторі нескінченної розмірності. Кінцева розмірність аттрактора означає, що даний сигнал можна відтворити за допомогою динамічної системи.**

Це особливо важливо при розв'язку задач керування, коли необхідно відрізнити детермінований хаос від звичайних шумів і перешкод. Справа в тому, що наявність внутрішнього порядку в детермінованому хаосі дозволяє в принципі управляти ним, у той час як при шумовому хаосі управління неможливо.

Очевидно, що мінімальне число динамічних змінних, необхідне для опису спостережуваного хаотичного руху, оцінюється як  $[d_{fc}] + 1$ , де  $[d_{fc}]$  – ціла частина фрактальної розмірності. Ця оцінка може бути використана, зокрема, для розв'язку однієї із самих складних задач, що вини-

кають при ідентифікації моделі розглядаємої системи, – задачі визначення кількості динамічних параметрів, необхідних для опису системи.

Розглянемо приклади, пов'язані із застосуванням процедури Паккарда-Такенса. Перший приклад ілюструє ідентифікацію розмірності математичної моделі, другий – діагностику об'єкта керування.

**Приклад 1.** У роботі [13] приводяться результати дослідження виділення сейсмічної енергії землетрусів у різних діапазонах магнитуд (від 3 до 8 балів) з використанням каталогів землетрусів Японських островів. Графіки залежності фрактальних розмірностей  $D_c$  від розмірностей простору вкладення  $m$  наведено на рисунку 2.32.

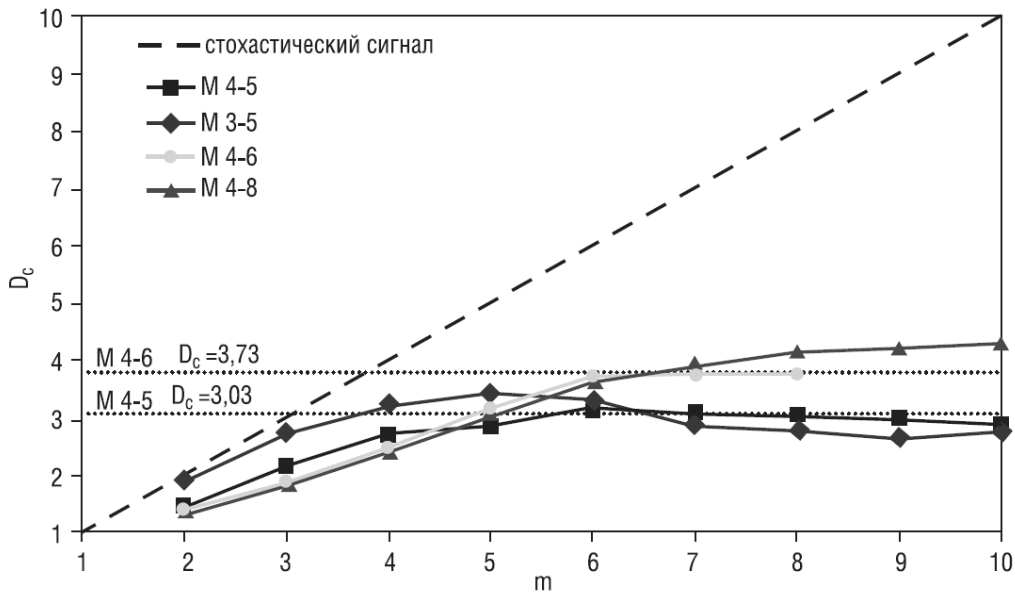


Рисунок 2.32 – Графік зміни фрактальної розмірності  $D_c$  від розмірності простору вкладення  $m$

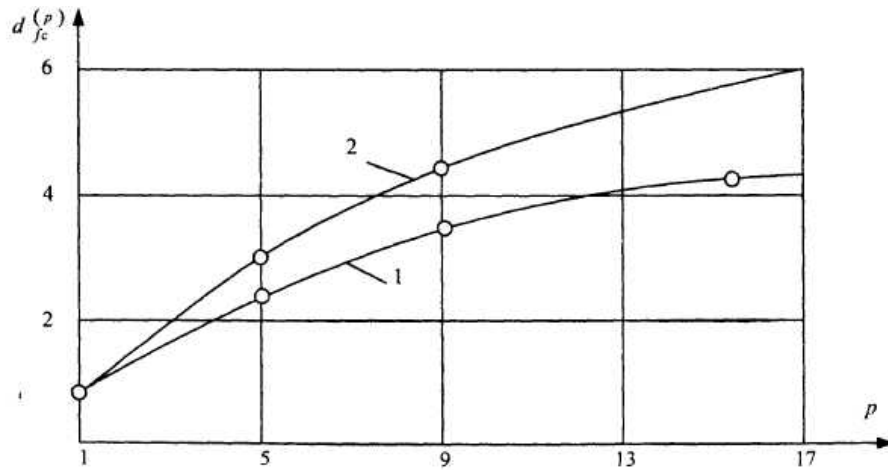
Установлено, що при  $m > 5$  нахил лінійних ділянок графіків перестає збільшуватися й залежність виходить на горизонтальну ділянку.

З наведених даних випливає, що процес, який приводить до виділення сейсмічної енергії в діапазоні магнитуд від 1 до 8, не є випадковим, а залежить від 5-6 основних параметрів.

**Приклад 2** [14]. При буровленні шпари однією з найважливіших технічних задач є оцінка ступеня зношування долота з метою його своєчасної заміни. Непряма оцінка стану бурильного інструмента по зміні механічної швидкості проходки не завжди надійна, оскільки зміна швидкості проходки може бути пов'язана зі зміною властивостей породи, а не зношуванням долота. Для діагностики стану долота застосована оцінка значення кореляційної розмірності пульсацій тиску промивної рідини.

На рисунку 2.33 представлені графіки розрахованих кореляційних розмірностей для зношеного й незношеного інструментів.





1 – незношений інструмент; 2 – зношений інструмент

Рисунок 2.33 – Криві Паккарда-Такенса для виявлення хаосу й визначення фрактальної розмірності

Видно, що незношене долото характеризується кінцевою фрактальною розмірністю  $d_{fc} = 4,5$ , у той час як фрактальна розмірність зношеного інструмента не обмежується скінченною величиною й визначає випадковий процес, а не детермінований хаос.

## 2.10 Реально існуючі фрактали

### *Довжина берегової лінії*

Багато берегових ліній не мають природнього масштабу довжини. Процеси, що формують границі розділу між водою й сушею, подібні в широкому діапазоні масштабів. На рисунку 2.34 показана частина узбережжя Норвегії [8]. Узбережжя порізане великими фіордами, маленькими фіордами й ще більш дрібними бухтами й бухточками. Довжину цього узбережжя ні лінійкою, ні циркулем виміряти не вдається. Альтернативний спосіб виміру довжини берегової лінії полягає в тому, щоб покрити карту сіткою, як показано у верхній частині рис. 2.34.

Нехай квадратні гнізда сітки мають розміри  $\delta \times \delta$ . Число  $N(\delta)$  таких гнізд, необхідних, щоб покрити берегову лінію на карті, приблизно дорівнює числу кроків, за яке можна обійти по карті берегову лінію циркулем з розчином  $\delta$ . Зменшення  $\delta$  приводить до збільшення числа гнізд, необхідних для покриття берегової лінії. Якби берегова лінія Норвегії мала цілком певну довжину  $L_N$ , то можна було б очікувати, що число кроків циркуля або число квадратних гнізд  $N(\delta)$ , необхідних для покриття бере-

гової лінії на карті, буде обернено пропорційно  $\delta$ , а величина  $L(\delta) = N(\delta) \times \delta$  при зменшенні  $\delta$  буде прагнути до постійної  $L_N$ .



Рисунок 2.34 – Визначення фрактальної розмірності узбережжя шляхом підрахунку кліток

Насправді це не так. Як видно з рисунка 2.35, при зменшенні довжини кроку  $\delta$  обмірювана довжина зростає. Графік на цьому рисунку, виконаний у подвійному логарифмічному масштабі, показує, що при зменшенні  $\delta$  обмірювана довжина берегової лінії не прагне до постійного значення.

Графік дозволяє одержати формулу для визначення довжини берегової лінії:

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D}. \quad (2.36)$$

Для звичайної кривої можна було б очікувати, що  $a = L_N$  (принаймні при досить малих  $\delta$ ) і показник  $D$  дорівнює одиниці. Але для берегової

лінії Норвегії, як видно із графіка,  $D = 1,52$ . Таким чином, берегова лінія – це фрактал із фрактальною розмірністю  $D$ .

По даним Мандельброта фрактальна розмірність берегової лінії Великобританії становить  $D = 1,3$ .

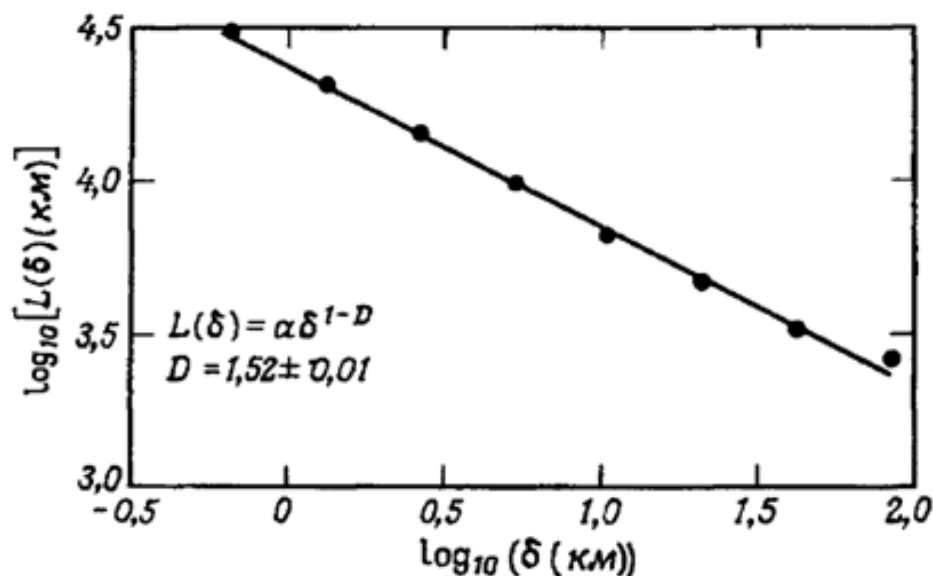


Рисунок 2.35 – Графік залежності довжини берегової лінії  $L(\delta)$  від кроку виміру  $\delta$  в логарифмічному масштабі

### Фрактальна антена

Фрактальні антени – відносно новий клас електрично малих антен, які принципово відрізняються своєю геометрією від відомих рішень. По суті, традиційна еволюція антен базувалася на евклідовій геометрії, що оперує об'єктами цілочисельної розмірності (лінія, коло, еліпс, параболоїд і т.п.). Головна відмінність фрактальних геометричних форм – їх дробова розмірність, що зовні проявляється в рекурсивному повторенні в зростаючому або зменшуваному масштабах вихідних детермінованих або випадкових шаблонів.

Розглянемо результати, отримані в області створення фрактальних антен різних типів [15].

Початок практичному застосуванню фрактальних антен в 1995 році поклав, як прийнято вважати, американський інженер Натан Коен (N. Cohen). Першою конструкцією фрактальної антени з найбільш повними вивченими електромагнітними й спрямованими властивостями стала антена на основі префрактальної кривої Коха. При побудові лінії Коха вихідний відрізок довжиною  $z$ , іменованій ініціатором фрактала, ділиться на три рівні частини. Центральну ділянку замінюють рівностороннім трикутником зі стороною  $z/3$ . У результаті утворюється ламана лінія, яка складається із чотирьох ланок довжиною  $z/3$  кожна. Цей процес повторюється для кож-

ного окремого сегмента ламаної лінії: у другій ітерації на відрізках  $z/3$  будуються трикутники зі сторонами  $z/9$ , на них – трикутники зі сторонами  $z/27$  (третя ітерація) і т.д. Кожний крок синтезу збільшує довжину результуючої кривої відповідно до вираження:

$$L = z \left( \frac{4}{3} \right)^n, \quad (2.37)$$

де  $n$  – число ітерацій.

Цей ефект мініатюризації антен є істотним лише при п'яти-шести перших ітераціях фрактала.

Стандартним варіантом фрактала Коха прийнято називати фрактал з кутом  $\theta$  при підставі, рівним  $60^\circ$ . Учений Пенсильванського університету К. Дж. Віной (К. J. Vinoy) запропонував розглядати кут при підставі ініціуючого трикутника як параметр, що характеризує антенну конструкцію. Змінюючи цей кут, можна одержувати аналогічні рекурсивні криві різної розмірності (рис. 2.36). Криві зберігають властивість самоподоби, однак результуюча довжина лінії може бути різною, що впливає на характеристики антени.

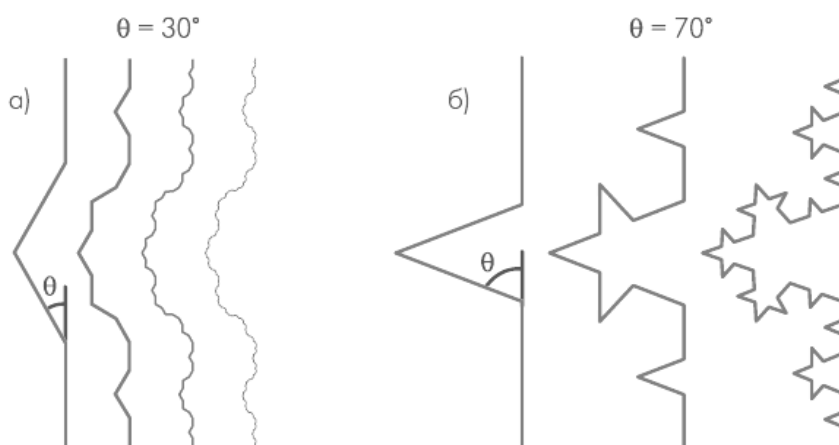


Рисунок 2.36 – Вид кривої Коха при  $\theta = 30^\circ$  (а) і  $\theta = 70^\circ$  (б)

Дж. Віной першим досліджував кореляцію між властивостями антени й розмірністю  $D$  узагальненого фрактала Коха. Було показано, що в міру збільшення кута  $\theta$  розмірність фрактала також збільшується, і при  $\theta \rightarrow 90^\circ$  наближається до  $D=2$ . Зі збільшенням розмірності нелінійно зростає й загальна довжина ламаної лінії, обумовлена співвідношенням:

$$L_{n,\theta} = \left( \frac{2}{1 - \cos \theta} \right)^n \cdot L_0, \quad (2.38)$$

де  $L_0$  – довжина лінійного диполя, відстань між кінцями якого така ж сама, як і у ламаної Коха,  $n$  – номер ітерації.

Перехід від  $\theta = 60^\circ$  до  $\theta = 80^\circ$  на шостій ітерації дозволяє збільшити загальну довжину префрактала більш ніж у чотири рази.

Між рекурсивною розмірністю й такими властивостями антени, як первинна резонансна частота, внутрішній опір на резонансі й багатодіапазонні характеристики, існує прямий зв'язок. На основі комп'ютерних розрахунків Віной одержав залежність першої резонансної частоти диполя Коха  $f_k$  від розмірності  $D$ , номера ітерації  $n$  та резонансної частоти прямолінійного диполя  $f_D$  тієї ж висоти, що й ламана Коха (по крайніх точках):

$$f_k = f_D \left[ 1 - \exp\left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{\ln D}{D} \right]. \quad (2.39)$$

Усі розглянуті дотепер конфігурації ламаної Коха синтезувалися рекурсивно. Однак, згідно Віноя, якщо порушити це правило, зокрема, задаючи різні кути  $\theta$  на кожній новій ітерації, властивості антени можна змінювати з більшою гнучкістю.

Для мобільних засобів зв'язку із частотою несучої  $\sim 2,4$  ГГц (довжина хвилі  $\lambda$  становить 12,5 см) габарити такої антени в друкованому виконанні становлять  $12,33 \times 10,16$  мм ( $\sim 0,10-0,12 \lambda$ ), смуга пропускання –  $\sim 20\%$  і КПД –  $93\%$ . Діаграма спрямованості по азимуту майже рівномірна, коефіцієнт підсилення в перерахуванні до входу фідера становить  $\sim 3,4$  дБ.

На цей час розроблена досить велика кількість фрактальних антен із застосуванням класичних фракталів. На рисунку 2.37 показаний варіант антени для мобільного телефону, у якій застосований хрест Мінковського.

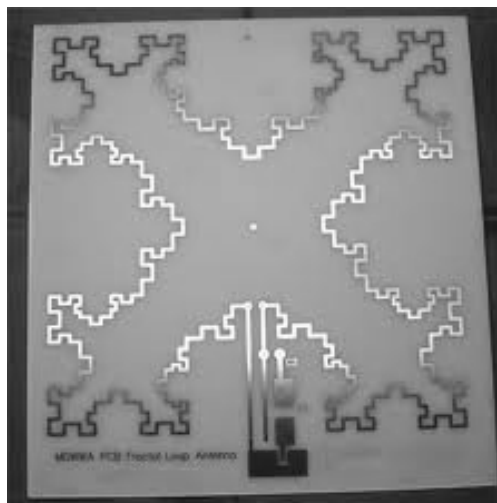


Рисунок 2.35 – Варіант виконання фрактальної антени

Таким чином, можливість вибору множини різноманітних параметрів для антенної системи на основі фракталів дозволяє при проектуванні антен задовольняти різні вимоги щодо значення внутрішнього опору й розподілу резонансних частот.

## 3 ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ХАОС

### 3.1 Умови зародження хаотичної динаміки

Учених давно цікавили два питання:

- чи може випадковий (хаотичний) процес бути детермінованим?
- чи можуть бути присутніми елементи випадкової або хаотичної поведінки в детермінованому процесі?

На перший погляд здається, що тут є два взаємовиключних поняття. *Випадковий процес* – це такий процес, точне пророцтво якого принципово неможливе. Можна лише ставити питання про вірогідність того або іншого варіанту його розвитку. З іншої сторони, *детермінований процес* – це по визначенню такий процес, кожний крок якого зумовлений деякими закономірностями, які нам наперед відомі. Іншими словами, це означає, що можна зі 100-процентною вірогідністю передбачити його майбутній розвиток у часі. Наприклад, якщо мова йде про механічну систему, то завдання початкових умов (координат і імпульсів) однозначно визначає наступну її еволюцію.

Однак зовсім недавно було виявлено [16, 17, 18], що рух деяких дуже простих динамічних систем неможливо передбачити на великий інтервал часу. Такі системи одержали назву: «*системи з хаотичною динамікою*», їх ще називають системами з нерегулярною динамікою.

Хаотичні рухи не є винятковим випадком у реальних фізичних задачах. Вони зустрічаються в динамічних системах, де присутні:

- 1) пружні елементи;
- 2) зазори або мертві зони;
- 3) тертя ковзання;
- 4) нелінійні зворотні зв'язки.

У природі й у повсякденній практиці багато таких процесів, які, на перший погляд, виглядають зовсім випадковими, хаотичними. Найпростіший приклад такого роду — це турбулентний рух води у гірській річці або у чайнику, коли вода кипить на сильному вогні. В атмосфері Землі існують турбулентні конвективні потоки повітря, які ускладнюють довгостроковий прогноз погоди. Схожі явища виникають в лазерах і в других приборах нелінійної оптики. Хаотичних варіацій з часом зазнають чисельності популяцій окремих видів комах. Концентрація компонентів у ході хімічної реакції теж може мінятися у часі дуже нерегулярно. Змушені коливання звичайного математичного маятника під впливом періодичної зовнішньої сили стають хаотичними, якщо амплітуда збурюючої сили перевищує деяке критичне значення.

Незважаючи на складність поведінки цих і других систем, демонструючих хаос, в основі багатьох з них лежать досить прості рівняння.

Наприклад, турбулентні конвективні потоки повітря в атмосфері Землі описуються рівняннями Нав'є-Стокса, які разом з рівняннями теплопроводності й рівняннями стану ідеального газу в полі сили тяжіння Землі, доповнені початковими умовами, повністю визначаючими поведінку системи. Те ж саме ставиться й до турбулентного руху рідини, який виникає, коли так зване число Рейнольдса  $R$  перевищує деяке критичне значення  $R_c$ . Навпаки, згідно з тими ж рівняннями Нав'є-Стокса, при  $R < R_c$  рух рідини є ламінарним і цілком передбачуваним.

Рівняння Кіргоффа також цілком однозначно описують поведінку всякого рода підсилювачів і других радіотехнічних схем. Коливання маятника під впливом періодичної сили описуються досить простим дифференціальним рівнянням другого порядку, яке відбиває другий закон Ньютона. Виявляється, що без ніяких випадкових сил або шумів рішення всіх цих рівнянь при певних значеннях параметрів виглядають випадковими. Наступний приклад наочно демонструє цей парадокс.

Той, хто займається комп'ютерним моделюванням випадкових процесів, добре знає, що майже в кожній комп'ютерній програмі є так званий генератор випадкових чисел, який при звертанні до нього видає випадкове число в інтервалі  $[0,1]$ . Також добре відомо, що в роботі сучасних комп'ютерів нічого випадкового немає. Кожний крок будь-якої комп'ютерної програми (у тому числі й генератора випадкових чисел) розписаний програмістом до дрібних деталей. Тому й випадкові числа виходять по цілком певному алгоритму. Тобто, іншими словами, вони утворюють цілком детерміновану послідовність, яку можна крок за кроком відтворити. Але тоді нічого випадкового в цій послідовності немає. Будь-яке "випадкове" число в ній можна передбачити із 100% вірогідністю! Проте, такі програми добре описують поведінку дійсно випадкових систем, що говорить про подібність характеристик цих детермінованих послідовностей чисел з істинно випадковими числами.

Другий приклад — це подвійний плоский маятник із точечними масами  $m_1$  й  $m_2$ , зображений на рисунку 3.1. Він має два ступені свободи — це два кути  $\varphi_1$  й  $\varphi_2$ .

Якщо відхилення від положення рівноваги мале, то система робить регулярні гармонійні коливання. Однак при збільшенні повної енергії настає такий момент, коли коливання стають *хаотичними* (рис. 3.2), маятники починають прокручуватися й дві близьких початкових умови приводять, зрештою, до зовсім різної динаміки цієї нелінійної системи із двома ступенями свободи.

Процеси, в яких хаос виникає при детермінованому опису, вивчаються теорією детермінованого хаосу [14, 16, 17, 18].

Встановлено, що детермінований хаос виявляється там, де є *сильна залежність від початкових умов*.

Розглянемо *парадигми теорії детермінованого хаосу*.



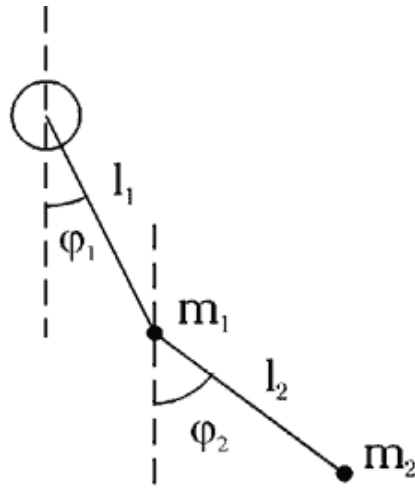


Рисунок 3.1 – Подвійний плоский маятник

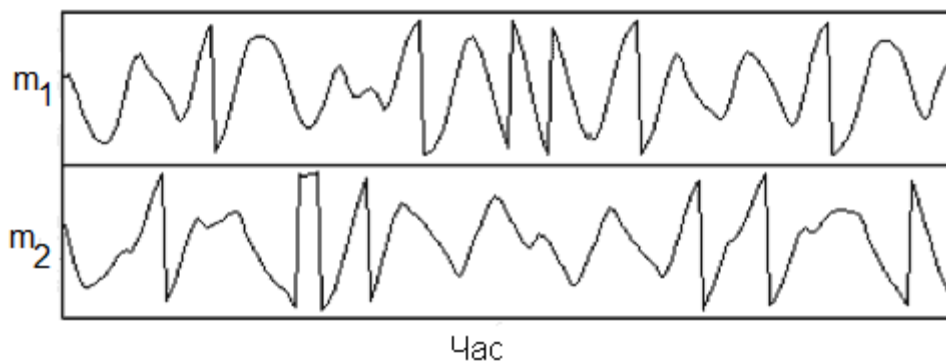


Рисунок 3.2 – Хаотичні коливання подвійного маятника

**Парадигма** (грец. *paradigma* – приклад, зразок) – це система теоретичних, методологічних і аксіологічних (ціннісних) установок, які взяті за зразок розв’язування наукових задач.

Парадигмами детермінованого хаосу є дивний атрактор Едварда Лоренца і логістичне рівняння.

### 3.2 Парадигма детермінованого хаосу – дивний атрактор Лоренца

В 1963 р. фахівець із фізики атмосфери Е. Н. Лоренц запропонував просту модель теплової конвекції в атмосфері, яка, як потім з’ясувалося, стала гарною моделлю для вивчення турбулентності.

Він досліджував шар рідини кінцевої товщини, яка підігривається знизу так, що між верхньою – холодною і нижньою – гарячою поверхнями підтримується постійна різниця температур [14]. Нагріта рідина поблизу дна, розширюючись, прагне піднятися нагору. Навпаки, холодна поблизу верху — опуститися вниз. Максимально спрощуючи рівняння Нав’є-

Стокса, що описують це явище, Лоренц випадково натикнувся на те, що навіть порівняно проста система із трьох зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку може мати розв'язком цілком хаотичні траєкторії.

Ця система рівнянь, що стала тепер класичною, має вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= rx - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}\tag{3.1}$$

де точка позначає диференціювання за часом  $t$ .

Змінна  $X$  пропорціональна швидкості конвективного потоку,  $Y$  описує різницю температур для потоків нагору й униз, а  $Z$  характеризує відхилення профілю температури від лінійного в поздовжньому напрямку, тобто уздовж прикладеного градієнта температури. Величина останнього характеризується керуючим параметром  $r$ , а  $\sigma$  і  $b$  – деякі безрозмірні константи, які характеризують систему.

Розв'язок цих диференціальних рівнянь визначає у параметричному виді траєкторію системи в тримірному фазовому просторі  $X, Y, Z$ . Через однозначність функцій, що стоять у правих частинах рівнянь, траєкторія себе ніколи не перетинає.

Лоренц досліджував вид цих траєкторій при фіксованих значеннях параметрів ( $r = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ), але при різних початкових умовах. Він встановив, що траєкторія хаотично блукає із напівпростору  $x > 0$  в напівпростор  $x < 0$ , формуючи при цьому дві майже плоскі, перепутані складним чином спіралі.

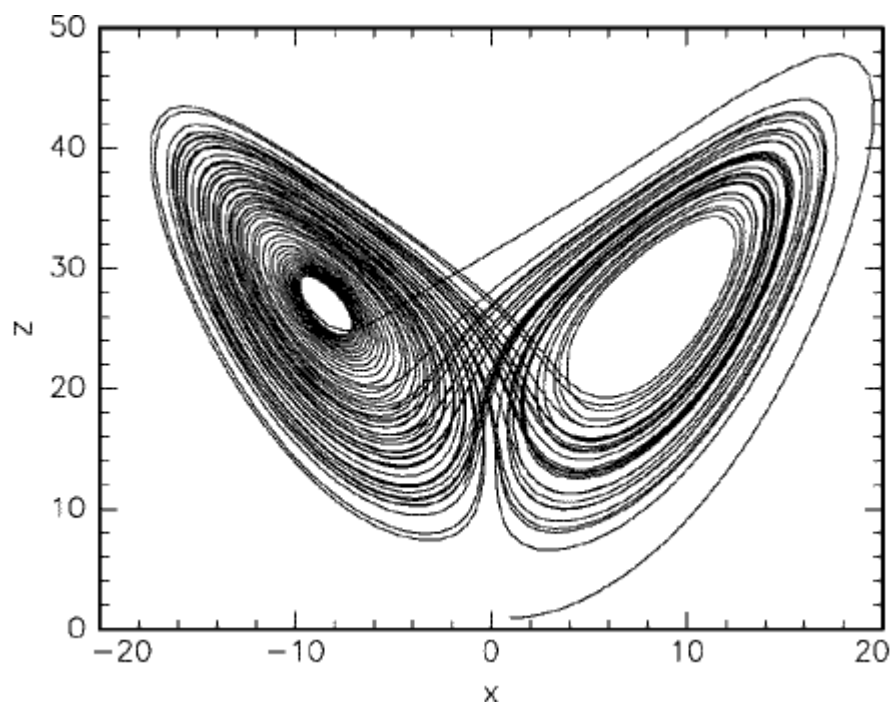
Фазова траєкторія цієї динамічної системи являє собою нескінченну лінію без самоперетинань, причому при  $t \rightarrow \infty$  траєкторія не залишає заданої області й не притягається ні до яких точок рівноваги, ні до яких циклічних траєкторій.

Така обмежена область із нестійкими траєкторіями усередині стала називатися **дивним атрактором** (на відміну від точки або кола, що представляють собою звичайні атрактори, які притягають до себе траєкторію).

Дивним його назвали тому, що він демонструє хаотичну поведінку детермінованої системи. Дивному атрактору відповідає складний аперіодичний рух, схожий із буденним уявленням про хаотичний процес. Однак теоретично такий рух повністю передбачуваний й відтворюваний – задавши ті ж початкові умови й праві частини диференціальних еволюційних рівнянь, ми відтворимо ту ж саму "хаотичну" траєкторію. Про таку поведінку динамічних систем говорять як про детермінований динамічний хаос.

На рисунку 3.3 показана проекція дивного атрактора Лоренца на площину  $XZ$  для деякої початкової умови. Траєкторія спочатку робить 1 оборот на правій стороні, потім 20 обертів на лівій, потім знову 1 справа, потім 4 зліва і так далі. Схожа поведінка була знайдена й при других зна-

ченнях параметрів. Хаотичність рішення означає, що якщо ми заздалегідь виберемо яким завгодно способом ланцюжок переходів з одного напівпростору в другий, то в системі Лоренца знайдеться рішення, яке в точності цей ланцюжок відтворить.



*Рисунок 3.3 – Траекторія, що відповідає хаотичному розв'язку рівнянь Лоренца, з початковими умовами  $X(0) = Y(0) = Z(0) = 1$*

Причина непередбачуваної поведінки цієї й других подібних систем полягає не в тому, що невірна математична теорема про існування й унікальність рішення, а в надзвичайній чутливості рішення до початкових умов. Близькі початкові умови з часом призводять до зовсім різних кінцевих станів системи.

Відмінність зростає з часом експоненційно, тобто надзвичайно швидко (рис. 3.4) відповідно до вираження:

$$D(t) = D(0) \cdot e^{ht}, \quad (3.2)$$

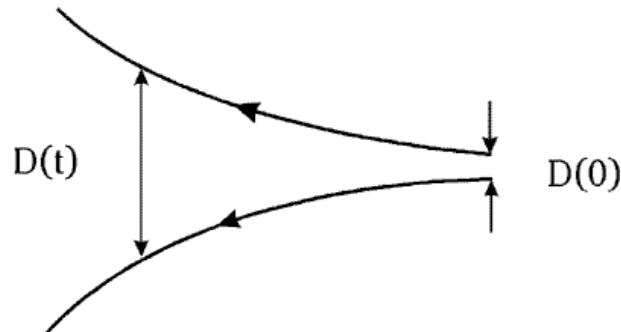
де інкремент (зростання) нестійкості  $h$  є функцією руху точки у фазовому просторі.

Ситуація частково схожа на ту, коли ми намагаємося поставити карандаш на шпичак. Нам це, як правило, не вдається, карандаш падає то вправо, то вліво. Причина невдач очевидна – вона полягає в нестійкості початкового стану. Мала зміна кута нахилу карандаша сильно міняє його наступний рух і, як наслідок, кінцевий стан.

Виявляється, що щось схоже виникає і в системах – вони рухаються таким чином, що весь час перебувають у нестійкому стані. Іншими слова-

ми, які завгодно малі збурювання початкових умов приводять з часом до сильного відхилення траєкторії від свого незбуреного положення.

Якщо фазовий простір системи є кінцевим, то фазові траєкторії не можуть розійтись через нестійкість більш ніж на характерний розмір області руху. Тому починається заплутування траєкторій і пророчити поведінку системи в таких умовах практично неможливо.



*Рисунок 3.4 – Дві первоначально близькі траєкторії у фазовому просторі розходяться з часом в результаті локальної нестійкості*

Для більшої наочності проблеми пророцтва уявіть собі гіпотетичну ситуацію: для пророцтва еволюції системи на один день вперед вимагається знання початкових умов з точністю  $10^{-3}$ , на два дні – з точністю  $10^{-6}$ , на три – з точністю  $10^{-9}$  і т.д. У цій ситуації час пророцтва збільшується в арифметичній прогресії, а точність завдання початкових умов – у геометричній. Щоб прогнозувати ситуацію на 100 днів вперед, потребується вже немислима точність –  $10^{-300}$ !

Навіть якби наші прибори й дозволяли проводити такі виміри, наприклад, температури й тиску для прогнозу погоди (у дійсності це неможливо), то мале збурювання, внесене змахом крил звичайного метелика, набагато перевищило б ефект, пов'язаний з неточністю цих вимірів. У цьому випадку, незважаючи на детермінований опис процесу, для довгострокових прогнозів знадобиться статистичний підхід.

У зв'язку із цим виникає цілком закономірне питання. Раз рішення може бути так чутливо до початкових умов і фактично до точності наших обчислень, то чи не є тоді безглуздом використання комп'ютера для цих цілей? Адже обчислення в комп'ютері завжди виконуються з кінцевою точністю, нехай і дуже високою. У чому ж тоді цінність комп'ютерних розрахунків?

Виявляється, що існують вагомі доводи на користь того, що в ряді випадків статистичні властивості отриманих за допомогою комп'ютера траєкторій, виявляються майже такими ж, як і в точних рішеннях. Більше того, вони нечутливі до малих збурювань і шумів у системі. Таким чином, вони не дуже чутливі й до точності розрахунків. Тобто комп'ютер може з успіхом використовуватися для знаходження правильних статистичних закономірностей у хаотичній детермінованій системі.

Однією з основних характерних особливостей усіх систем, у яких спостерігається детермінований хаос, є те, що вони описуються нелінійними дифференціальними рівняннями або системами рівнянь. Прикладом такого рівняння є вже згадане рівняння Нав'є-Стокса, що описує плин густої нестисливої рідини:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\text{grad } p + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3.3)$$

де  $\rho$  – щільність рідини,  $p$  – тиск,  $\eta$  – в'язкість і  $\mathbf{v}$  – швидкість рідини, що залежить від просторової координати  $r$  і часу  $t$ .

Нелінійність у цьому рівнянні міститься в члені  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ , що описує так зване переносне прискорення.

До таких рівнянь не можна застосовувати відомий принцип суперпозиції, справедливий для лінійних систем, згідно якому сума рішень теж являється рішенням. Друге ускладнення пов'язане з тим, що в нелінійних рівняннях, як правило, існує не одне, а декілька рішень. Серед них можуть бути як хаотичні, так і регулярні, тобто періодичні рішення. Рішення, яке приймається на практиці, залежить від початкових умов.

Таким чином, розуміння природи детермінованих хаотичних процесів необхідне насамперед для того, щоб ними управляти або передбачувати (з якоюсь вірогідністю) їх еволюцію.

В останні часи вчені з'ясували, що накладення слабкого зворотного зв'язку на систему може привести до трансформації хаотичного сигналу в регулярний протягом деякого часу. Виявилось, що управляти хаотичними системами в цьому змісті навіть простіше, чим детермінованими.

### 3.3 Парадигма детермінованого хаосу – логістичне рівняння

Другою парадигмою детермінованого хаосу є так зване логістичне рівняння, або рівняння росту популяцій:

$$x_{n+1} = ax_n - bx_n^2, \quad (3.4)$$

де  $ax_n$  – ріст або народження популяції за  $n$ -й період,  $bx_n^2$  – обмеження росту, пов'язані з обмеженістю енергетичних і харчових ресурсів,  $x_{n+1}$  – число популяцій до початку  $(n+1)$ -го періоду.

Перепишемо (3.4) у безрозмірному виді, уводячи заміну змінних  $x'_n = \frac{b}{a} x_n$ ;  $x_n = \frac{a}{b} x'_n$ . Тоді:

$$x'_{n+1} = a \frac{a}{b} x'_n - b \frac{a^2}{b^2} (x'_n)^2 = \frac{a^2}{b} x'_n (1 - x'_n) = \lambda x'_n (1 - x'_n), \quad \lambda = \frac{a^2}{b}. \quad (3.5)$$

Запишемо (3.5) у первинних позначеннях:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n). \quad (3.6)$$

Це і є логістичне рівняння з параметром  $\lambda$ . При цьому, для того, щоб відносне значення чисельності популяцій, наприклад, комах перебувало між 0 і 1, слід обмежити  $\lambda \in [0, 4]$ .

Для того, щоб оцінити вплив параметра  $\lambda$  на чисельність популяцій, розглянемо ріст чисельності за два цикли.

Використаємо рівняння (3.6) і отримаємо:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) = f(x_n), \quad (3.7)$$

$$x_{n+2} = \lambda x_{n+1} (1 - x_{n+1}) = f(x_{n+1}) = f(f(x_n)) = f^2(x_n). \quad (3.8)$$

Відображення (3.7) і (3.8) можна розглядати як ітеративний процес впливу функції  $f$  на початкову точку множини  $x_0$ . Ясно, що для довільного  $n$  отримаємо:

$$f^n(x_0) = f_0 f^{n-1}(x_0) = f(f^{n-1}(x_0)). \quad (3.9)$$

Тепер повернемося до логістичного рівняння (3.6) і розглянемо як змінюється його динаміка при гладкій зміні параметра  $\lambda$  в діапазоні  $1 < \lambda < 3$ .

Знайдемо нерухливі точки відображення. Для цього запишемо рівняння (3.6) з координатами нерухливих точок:

$$x_e = \lambda x_e (1 - x_e) \quad (3.10)$$

Приведемо це квадратне рівняння до загального виду:

$$x_e^2 + \frac{1 - \lambda}{\lambda} x_e = 0.$$

Коріння цього рівняння дорівнюють:

$$x_e^{(1)} = 0, \quad x_e^{(2)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}. \quad (3.11)$$

При зміні значення параметра  $\lambda$ , у системі спостерігається наступна поведінка.

- Якщо  $\lambda$  більше 0 і менше 1, популяція зрештою вимре, незалежно від початкових умов (рис. 3.4).
- Якщо  $\lambda$  більше 1 і менше 2, чисельність популяції швидко вийде на стаціонарне значення  $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ , незалежно від початкових умов.

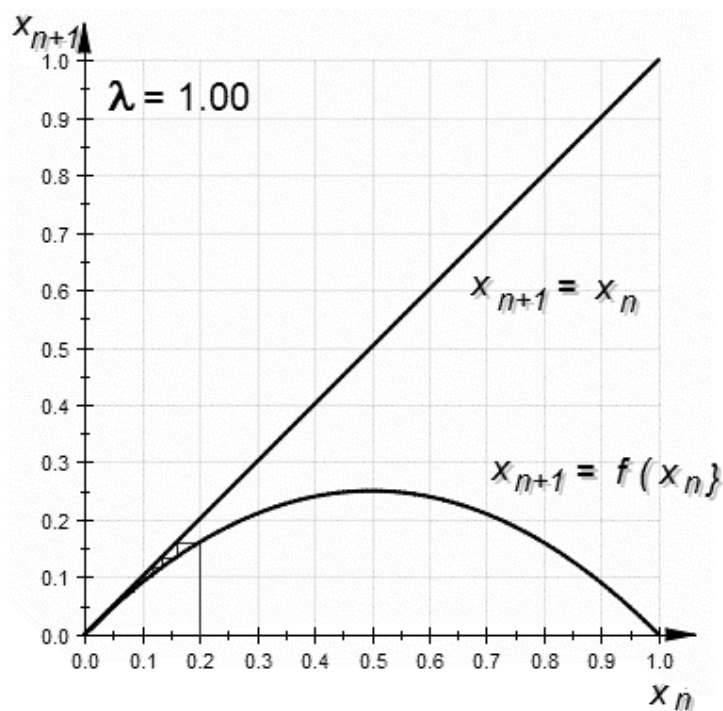


Рисунок 3.4 – Ітераційна діаграма Ламерея для відображення  $x_{n+1} = f(x)$  при  $\lambda = 1$

- Якщо  $\lambda$  більше 2 і менше 3, чисельність популяції точно так само прийде до того ж стаціонарного значення  $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ , але спочатку буде трохи коливатися довкола нього (рис. 3.5).
- Якщо  $\lambda$  більше 3 і менше 3,45, чисельність популяції буде нескінченно коливатися між двома значеннями.
- Якщо  $\lambda$  більше 3.45 і менше 3.54 (приблизно), то чисельність популяції буде нескінченно коливатися між чотирма значеннями, як показано на рисунку 3.6.

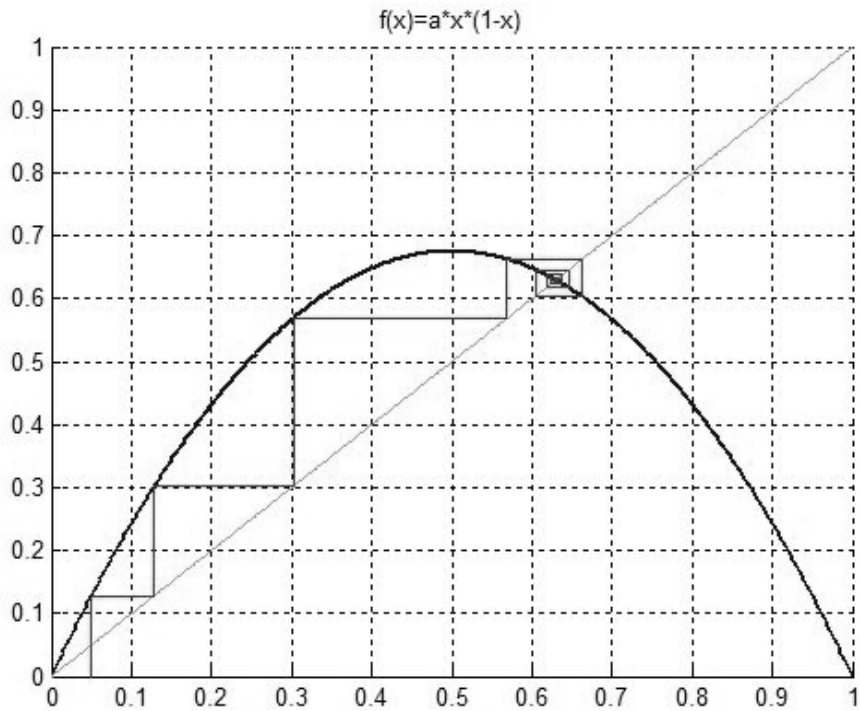


Рисунок 3.5 – Діаграма Ламерея логістичного рівняння для  $\lambda = 2,7$

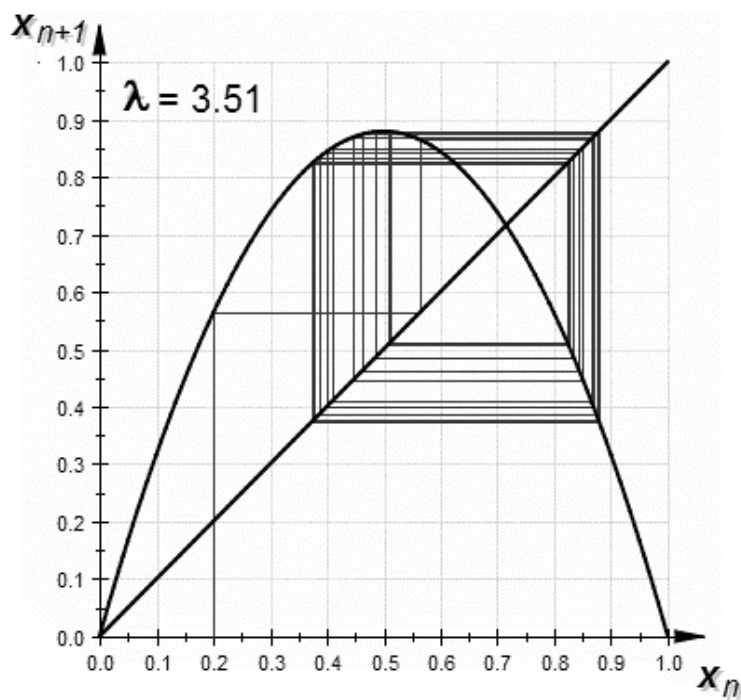


Рисунок 3.6 – Втрата стійкості популяцій при  $\lambda^{(2)} = 3,51$

- При значенні  $\lambda$  більше 3.54, чисельність популяції буде коливатися між 8 значеннями, потім 16, 32 і так далі. Довжина інтервалу зміни параметра, при якому спостерігаються коливання між однакою кількістю значень, зменшується в міру збільшення  $\lambda$ . Відношення



між двома довжинами суміжних інтервалів прагне до константи Фейгенбаума, рівної  $\delta \approx 4.669\dots$ . Подібна поведінка являє типовий приклад каскаду біфуркацій подвоєння періоду.

- При значенні  $\lambda$  приблизно рівному 3.57, починається хаотична поведінка, а каскад подвоєнь закінчується. Коливання більше не спостерігаються. На рисунку 3.7 показано діаграму Ламерея для  $\lambda = 4$ .

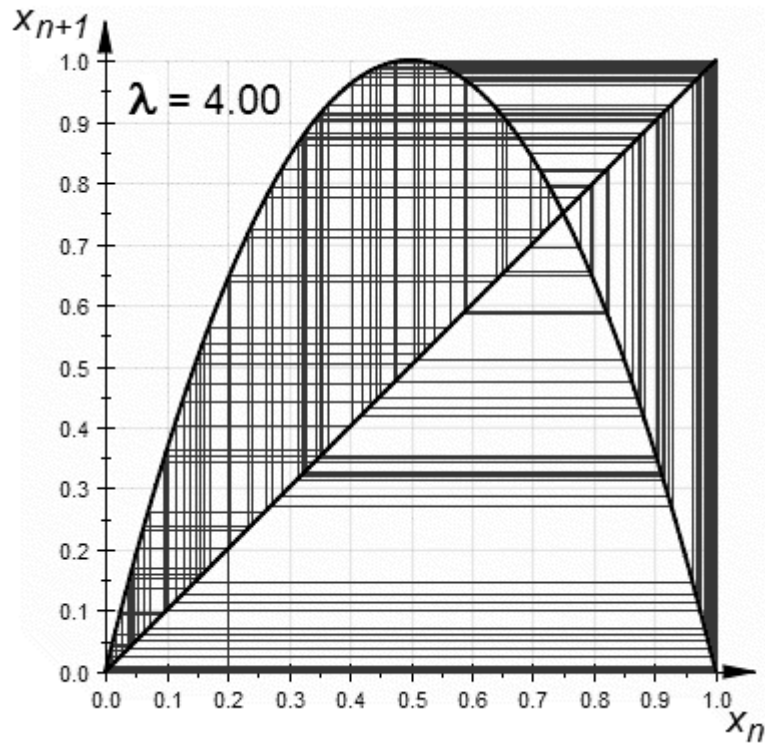


Рисунок 3.7 – Виникнення хаосу при  $\lambda = 4,0$

Невеликі зміни в початкових умовах приводять до непорівнянних відмінностей подальшої поведінки системи в часі, що є основною характеристикою хаотичної поведінки.

Для  $\lambda = 4$  рівняння (3.6) може бути вирішене шляхом заміни змінних, що дозволить побачити надзвичайну залежність розв'язку від початкових умов. Отже, представимо дискретну послідовність  $x_n$  косинусоїдальною дискретною послідовністю:

$$x_n = \frac{1 - \cos 2\pi\theta_n}{2}. \quad (3.12)$$

де  $\theta_n$  – числове значення дискретної послідовності.

При такій заміні рівняння (3.8) перетвориться в такий вид:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi\theta_{n+1}) = 4 \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi\theta_n) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi\theta_n) \right) \right] = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi\theta_n). \quad (3.13)$$

Одним з розв'язків цього рівняння є:

$$\theta_{n+1} = 2\theta_n, \quad (3.14)$$

тобто наступне значення утворюється множенням на 2.

Звідси випливає, що для  $n$  ітерацій при початковому значенні  $\theta_0$ :

$$\theta_n = 2^n \theta_0. \quad (3.15)$$

Можна безпосередньо переконатися в тому, що цей розв'язок відповідає хаосу в системі. Дійсно, оскільки  $x_n$  пов'язане з  $\theta_n$  функцією  $\cos 2\pi\theta_n$ , додавання цілого числа до  $\theta_n$  (або заміна знака) приводить до того ж самого значення  $x_n$ . Тому, якщо записати  $\theta_n$  у звичайній десятковій системі, наприклад, поклавши  $\theta_n = 11,2693\dots$ , то можна просто відкинути 11. Ще краще використовувати двійкову систему для  $\theta_0$ , поклавши, наприклад:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = 0,101101\dots$$

При цьому множення на два (перехід від  $n \rightarrow (n+1)$ ) означає просто зрушення коми вправо на 1 знак:

$$\theta_1 = 0,01101\dots, \theta_2 = 0,1101\dots, \theta_3 = 0,101\dots, \theta_4 = 0,01\dots$$

Таким чином, значення  $\theta_n$ , породжувані будь-якими початковими  $\theta_0$ , залежать від  $n$ -го й наступного розрядів  $\theta_0$ . Це дозволяє дати одне з можливих визначень хаотичної поведінки:

***Динамічна змінна  $x_n$  при великих  $n$  ухвалює значення, які надзвичайно сильно залежать від точного початкового значення  $x_0$ .***

Припустимо, що є два початкових значення  $x_0$  і  $x'_0$ , які різняться на мале число  $\varepsilon$  і породжують дві послідовності популяцій  $x_n$  і  $x'_n$ , що починаються відповідно з  $x_0$  і  $x'_0$ . Тоді після  $n$  кроків різниця між ними збільшується до значення  $2^n \varepsilon$ .

Біфуркаційна діаграма, наведена на рисунку 3.8, показує зображення зміни можливих динамічних режимів системи (рівноважних станів, стаціо-

нарних точок, періодичних орбіт та ін.) при зміні значення біфуркаційного параметра (тут параметр  $\lambda \in [2,4]$ ).

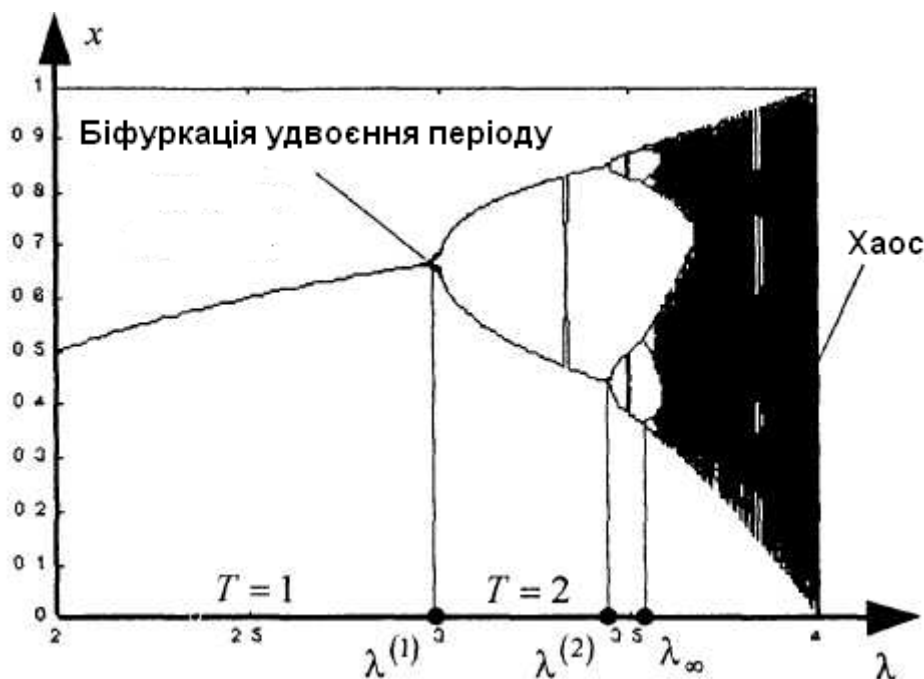


Рисунок 3.9 – Біфуркаційна діаграма логістичного рівняння,  $\lambda \in [2,4]$

### 3.4 Якісні й кількісні ознаки хаосу

Насамперед, слід урахувати, що хаотичні коливання можуть виникнути в системі, яка містить нелінійний елемент. У лінійній системі хаотичні коливання не виникають. Існують наступні **якісні ознаки**, які можуть сигналізувати про можливість появи хаотичних траєкторій:

- 1) чутливість до зміни початкових умов;
- 2) зростаюча складність регулярних рухів у міру зміни деяких параметрів;
- 3) фрактальні властивості руху у фазовому просторі, які вказують на присутність дивного атрактора;
- 4) наявність у безперервній системі біфуркацій Хопфа;
- 5) наявність у дискретній системі біфуркацій подвоєння періоду (приклад: логістичне рівняння).

**Кількісні ознаки** хаосу визначаються наступними показниками:

- 1) позитивний показник Ляпунова;
- 2) фрактальна розмірність атрактора.

Розглянемо докладніше кількісні показники.

**Показник Ляпунова.** Хаос у детермінованих системах пов'язаний із високою чутливістю до зміни початкових умов. Це означає, що дві траєк-

торії, близькі друг до друга у фазовому просторі в деякий початковий момент, починають експоненціально розходитися в наступні моменти часу. Якщо  $\rho_0$  – міра початкової відстані між двома вихідними точками, то через малий час  $t$  відстань між траєкторіями, які виходять із цих точок, зростає у відповідності з вираженням:

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t}. \quad (3.16)$$

Для дискретних систем відповідно маємо:

$$\rho_n = \rho_0 e^{\alpha n}. \quad (3.17)$$

Величина  $\alpha$  називається показником Ляпунова.

**Критерій хаосу в термінах показника Ляпунова:**

При  $\alpha > 0$  – хаотичний рух.

При  $\alpha \leq 0$  – регулярний рух.

Розглянемо процедуру експериментального визначення показника Ляпунова.

Обчислення показника Ляпунова  $\alpha$  починається з вибору опорної траєкторії, визначення точки на сусідній траєкторії й виміру величини  $\frac{\rho(t)}{\rho_0}$ , як показано на рисунку 3.10. Далі інтегруються рівняння руху уздовж сусідньої траєкторії й визначається  $\rho(t)$ .

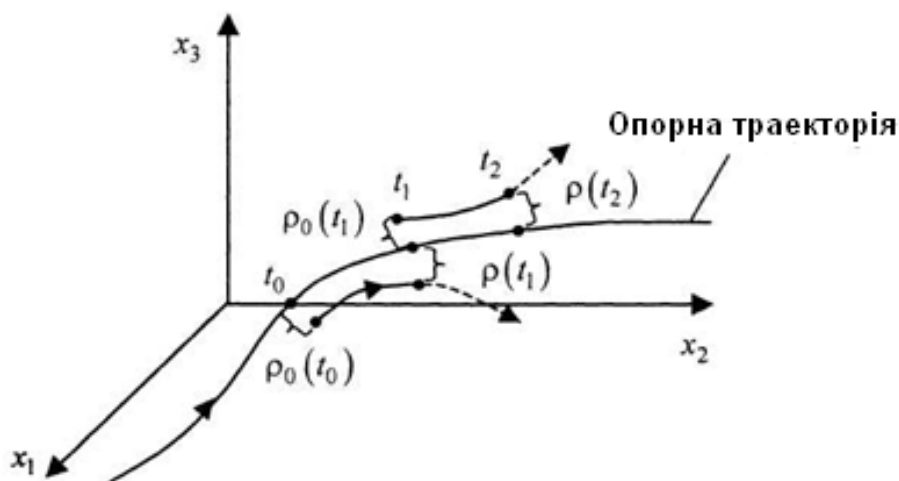


Рисунок 3.10 – Геометричні побудови при визначенні показника Ляпунова для безперервних систем

Якщо відстань  $\rho(t)$  стає занадто великою і відхиляється від експонентної поведінки, потрібно знайти нову сусідню траєкторію й визначити

нову початкову відстань  $\rho_0(t)$  і т.д.;

Показник Ляпунова визначається усередненням:

$$\alpha = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{k=1}^N \ln \frac{\rho(t_k)}{\rho_0(t_{k-1})}, \quad (3.18)$$

де  $N$  – число точок на опорній траєкторії, яке дорівнює числу сусідніх траєкторій, узятих для одержання експонентного показника  $\alpha$ .

Для дискретних систем:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.19)$$

показник Ляпунова характеризує середню втрату інформації за одну ітерацію:

$$\alpha(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \varepsilon) - f^n(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (3.20)$$

**Приклад.** Знайдемо показник Ляпунова для відомого нам логістичного рівняння (3.8) при  $\lambda = 4$ . Використовуючи формулу (3.19):

$$\theta_n = 2^n \theta_0.$$

і вираження (3.24), одержимо:

$$\alpha(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{d\theta_n(\theta_0)}{d\theta_0} \right) = \ln 2 > 0.$$

Обчислене значення свідчить про те, що при  $\lambda = 4$  має місце хаос, у чому ми ще раз переконалися.

### 3.5 Практичне застосування хаотичної динаміки

Перед тим, як звернутися до конкретних прикладів застосування хаотичної динаміки, слід узагальнити основні особливості, які можуть бути використані тією чи іншою мірою при розв'язку дослідницьких задач.

Отже, стародавні греки називали *хаосом* безладну матерію, неорганізовану стихію, з якої утворювалося згодом усе існуюче й народився порядок.

Термін *динамічний*, або *детермінований хаос* був привласнений явищу нерегулярного (хаотичного) руху в нелінійних системах тому, що він породжується власною динамікою нелінійної детермінованої системи. У фазовому просторі системи такій поведінці відповідає *дивний атрактор*.

*Атрактор (attractor)* у перекладі з англійської означає «притягувач». До нього притягаються всі траєкторії з деякої околиці атрактора, називаної також *басейном притягання*. Термін «дивний» використовується, щоб підкреслити незвичайність властивостей атрактора, що відповідає хаотичній поведінці.

Причиною нерегулярності поведінки є властивість нелінійних систем експоненціально швидко розлучати близькі на початку траєкторії в обмеженій області фазового простору. Передбачити поведінку таких траєкторій у хаотичних системах на тривалий час неможливо, оскільки вони мають велику чутливість до початкових умов, а початкові умови, як у фізичних експериментах, так і при комп'ютерному моделюванні, можна задати лише з кінцевою точністю.

На перший погляд, природа хаосу виключає можливість управляти ним. У дійсності ж нестійкість траєкторій хаотичних систем робить їх надзвичайно чутливими до керування.

Хаотичні траєкторії мають властивість із часом попадати в околицю *будь-якої* точки, що належить атрактору. Якщо потрібно, щоб це відбулося через час, не більше, ніж  $T$ , то необхідний результат може бути отриманий за рахунок одного або серії малопомітних, незначних збурювань траєкторії. Кожне із цих збурювань лише злегка змінює траєкторію. Але через якийсь час нагромадження й експонентне посилення малих збурювань приводить до досить сильної корекції траєкторії. При правильному виборі збурювань це дозволяє розв'язати поставлену задачу, не уводючи траєкторію з хаотичного атрактора. Таким чином, системи з хаосом демонструють одночасно й гарну керованість і дивну пластичність – система чуйно реагує на зовнішні впливи і при цьому зберігає тип руху.

Комбінація керованості й пластичності на думку багатьох дослідників є причиною того, що хаотична динаміка стала характерним типом поведінки для багатьох життєво важливих підсистем живих організмів. Наприклад, хаотичний характер серцевого ритму дозволяє серцю гнучко реагувати на зміну фізичних і емоційних навантажень, забезпечуючи запас динамічної міцності.

Повернемося до властивостей хаосу в маломірних системах. Отже, поведінка хаотичних траєкторій не може бути передвіщена на великі інтервали часу. Прогноз руху уздовж траєкторій стає усе більш і більш невідзначеним у міру віддалення від початкових умов. З погляду теорії інформації це означає, що *система сама породжує інформацію* й швидкість створення інформації тим вище, чим більше хаотичність системи. Оскільки система створює інформацію, то її містять і траєкторії системи.

### Пошук і відтворення інформації

Тепер задамося питанням: а чи не можна зіставити траєкторії системи інформацію, яка нас цікавить, у вигляді послідовності символів? Якби це вдалося зробити, частина траєкторій відповідала б нашим інформаційним послідовностям і їх можна було б одержувати, вирішуючи рівняння, що визначають динаміку системи. Якщо ж побрати кожний (не занадто малий) фрагмент інформаційної послідовності, то з його допомогою можна відновити всю інформаційну послідовність, відповідну даній траєкторії. Різним траєкторіям відповідають різні інформаційні послідовності, і виникає можливість відновити кожен з них по будь-якому її невеликому фрагменту. Тим самим реалізується асоціативний доступ (доступ *по змісту*) до всієї інформації, записаної в системі. Отже, інформація запам'ятовується й зберігається у вигляді *траєкторій динамічної системи й має властивості асоціативності*.

На рисунку 3.11 наведено ілюстрацію принципу запису інформації на граничних циклах одномірних динамічних систем – слова «хаос». У якості алфавіту обрано підмножину кирилиці:  $A = \{a, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х\}$ , довжина алфавіту  $N=20$ . Фоновий простір (одичинний відрізок  $I = [0, 1]$ ) розділено на  $N$  відрізків і кожному з них поставлено у відповідність букву – елемент алфавіту. Влучення фазової траєкторії на той або інший відрізок інтерпретується як поява на виході динамічної системи відповідного елемента алфавіту.

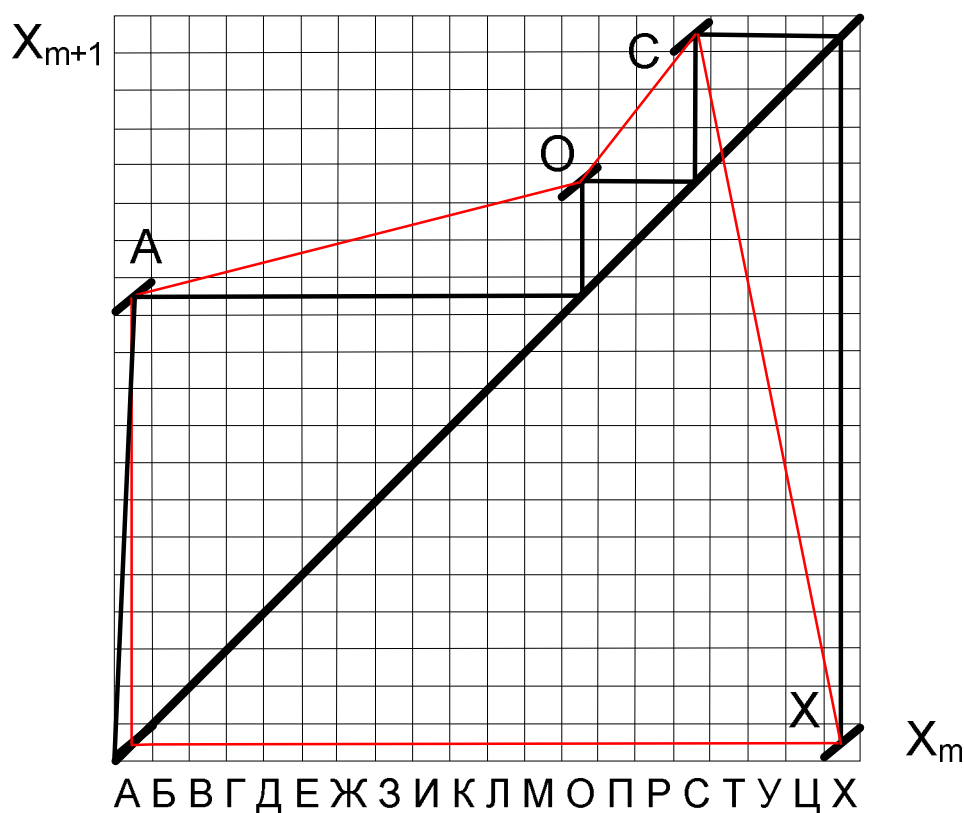


Рисунок 3.11 – Функція відображення слова «хаос»

Побудуємо цикл  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0,975; 0,025; 0,625; 0,775\}$  для слова «хаос», що представляє собою якийсь інформаційний блок.

Кожна точка цього циклу однозначно пов'язана з одним з елементів інформаційного блоку, і являє собою центр відповідного регіону  $= (m_j - 0.5)/N$ , де  $m_j$  — порядковий номер елемента блоку  $\alpha_i$  в алфавіті. Після того як в одномірному фазовому просторі побудований цикл, що відповідає записаному інформаційному блоку, на площині  $(X_m, X_{m-1})$  відкладемо точки виду  $(x_i, x_{i-1})$ :  $(0,975; 0,025)$ ,  $(0,025; 0,625)$ ,  $(0,625; 0,775)$ ,  $(0,775; 0,975)$ . Через кожен з них проведемо відрізок з нахилом  $s=0,5$ , що доходить до границь регіону. Ці інформативні відрізки забезпечують стійкість циклу. З'єднаємо кінці інформативних ділянок між собою й з кінцями відрізка  $[0, 1]$  прямими лініями. На цьому синтез функції одномірного відображення завершений.

Професор А. С. Дмитрієв [19] наводить приклад запису інформації із зображення кошеняти розміром 32x48 пікселя (зліва на рис. 3.12).

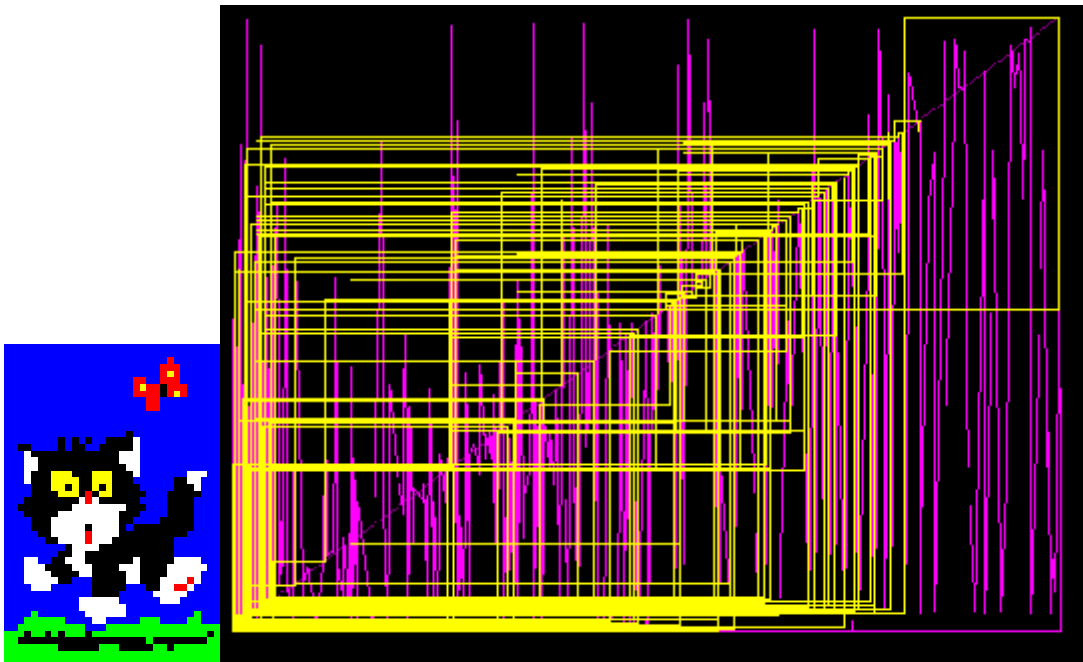


Рисунок 3.12 – Приклад, що ілюструє запис інформації на циклах одномірного відображення відрізка в себе  $x_{n+1} = f(x_n)$

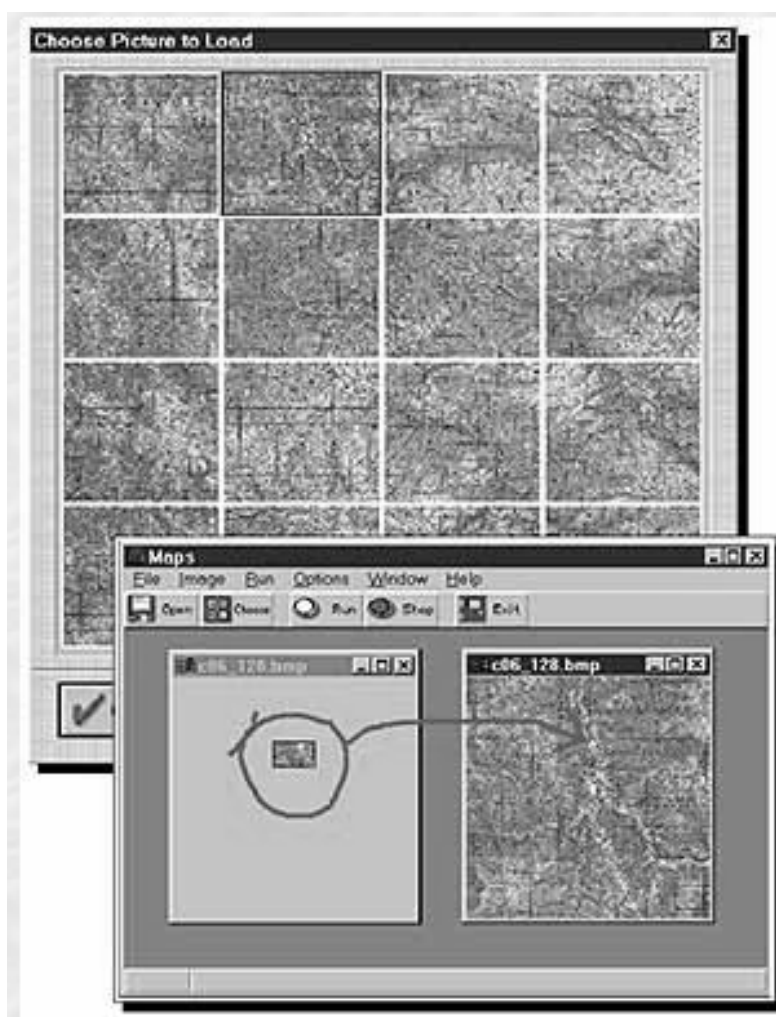
У правій частині рисунку 3.12 жовтим кольором зображена траєкторія – граничний цикл, яка відповідає зображенню кошеняти. Фіолетовим кольором показана синтезована функція  $y = f(x)$ .

Будь-яка точка циклу є "входом", з використанням якого можна відтворити весь образ шляхом ітерування відображення. При старті з довільних початкових умов траєкторія після перехідного процесу притягається до одного із двох циклів і відтворює відповідний образ.



У теперішній час стало можливим синтезувати динамічні системи з об'ємом записаної інформації, еквівалентної середньому зібранню творів.

Інший приклад застосування асоціативної пам'яті на основі хаотичної динаміки ставиться до задач орієнтування й навігації. Область для орієнтування загальною площею  $576 \text{ км}^2$  [19] задається географічною картою в масштабі  $M 1:20000$  (рис. 3.13). Вона розбита на 16 фрагментів, кожний з яких являє собою кольоровий графічний образ розміром  $200 \times 200$  пікселів в 256-кольоровому алфавіті. Кожний з образів представлений як граничний цикл у тому самому двовимірному кусочно-лінійному відображенні.



*Рисунок 3.13 – Приклад використання хаотичної динаміки для цілей навігації й ідентифікації*

Для визначення місця розташування користувачеві досить пред'явити будь-який шматочок фрагмента карти. Якщо пошук по шматочкові успішний (успіх реєструвався при пред'явленні програмі шматочків аж до  $1 \text{ км}^2$ , тобто аж до  $0,2\%$  від первісної площі) фрагмент карти з'явиться на екрані.

Програма демонструє також можливість ідентифікації по перевернутих шматочках. При цьому рівень викривлень у шматочку, пропонованому для ідентифікації, може становити  $70-80\%$ .

Розроблена технологія дозволяє записувати, зберігати й витягати будь-які типи даних: зображення, тексти, цифрову музику й мову, сигнали і т.д. Прикладом використання технології є персональна система керування факсимільними документами з асоціативним доступом Facsdata Wizard, яка забезпечує можливість створення архівів неструктурованої інформації з повним автоматичним індексуванням усієї збереженої інформації.

Для пошуку необхідних документів користувач робить запит шляхом набору в довільній формі декількох рядків тексту, що ставиться до змісту необхідного документа. У відповідь система видасть шуканий документ, якщо вхідної інформації досить для його однозначного пошуку, або запропонує набір варіантів. При необхідності можна одержати й факсимільну копію знайденого документа. Наявність помилок у запиті й при перетворенні первинної інформації в текстову не позначається істотно на якості пошуку. Створення електронного архіву не вимагає додаткового дискового простору.

Подальший розвиток цей підхід одержав у програмному комплексі "Незабудка", призначеному для роботи з архівами неструктурованої інформації (як на персональних комп'ютерах, так і на інформаційних серверах) і реалізованому у вигляді пошукової машини під стандартними браузерами типу Navigator або Explorer. При звертанні до адреси інформаційного сервера користувач попадає в пошукову систему й одержує можливість робити пошук необхідних документів і матеріалів по змісту, використовуючи в якості запитів фрагменти запитуваних матеріалів, фрагменти матеріалів, аналогічних по змісту, або фрази, що відбивають його уявлення про зміст необхідних матеріалів.

### ***Передача й захист інформації***

У більшості сучасних систем зв'язку у якості носіїв інформації використовуються гармонійні коливання. Інформаційний сигнал у передавачі модулює ці коливання по амплітуді, частоті або фазі, а в приймачі інформація виділяється за допомогою зворотної операції – демодуляції. Модуляція носія може здійснюватися або за рахунок модуляції вже сформованих гармонійних коливань, або шляхом керування параметрами генератора в процесі формування коливань.

Аналогічним образом можна робити модуляцію *хаотичного сигналу* інформаційним сигналом. Однак можливості тут значно ширше. Дійсно, якщо у випадку гармонійних сигналів кількість керованих характеристик становить усього три (амплітуда, фаза й частота), то у випадку хаотичних коливань навіть невелика зміна параметра дає *надійно зафіксовану* зміну характеру коливань. Це означає, що в джерелах хаосу зі змінюваними параметрами є широкий набір схем перетворення інформаційного сигналу в хаотичний (*модуляції хаотичного сигналу інформаційним*). Крім того, хаотичні сигнали є принципово широкосмуговими, інтерес до яких у радіотехніці традиційний і пов'язаний з великою інформаційною ємністю. У системах зв'язку широка смуга частот несучих сигналів використовується як

для збільшення швидкості передачі інформації, так і для підвищення стійкості роботи систем при наявності збурювань.

Шумоподібність і самосинхронізація систем, побудованих на основі хаосу, дають їм потенційні переваги над традиційними системами у розширенні спектру, що базуються на псевдовипадкових послідовностях. Крім того, вони допускають можливість більш простої апаратної реалізації з більшою енергетичною ефективністю й більш високою швидкістю операцій.

На рисунку 3.14 зліва показано джерело хаосу, що складається з нелінійної й лінійної систем, замкнених у кільце зворотного зв'язку, зправа – зовнішній вигляд плати електронної схеми (угорі) і фазовий портрет хаотичного атратора (унизу). Особливістю схеми є те, що навіть невеликі зміни параметрів елементів електронної схеми приводять до істотної зміни характеру хаотичних коливань.

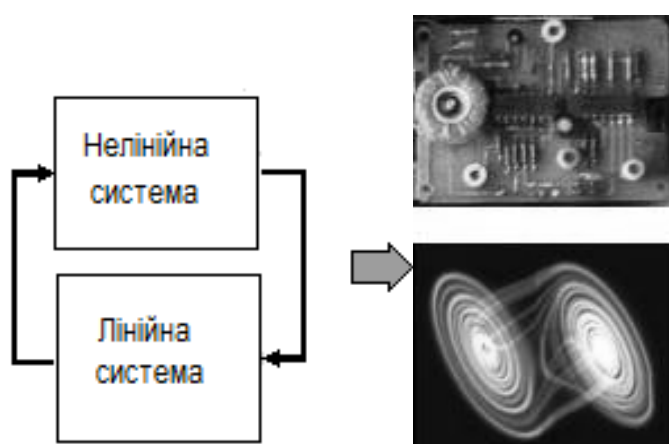


Рисунок 3.14 – Передавач із хаотичними коливаннями [19]

На наступному рисунку 3.15 наведена структурна схема апаратури для каналу зв'язку, у якому використовується хаос.

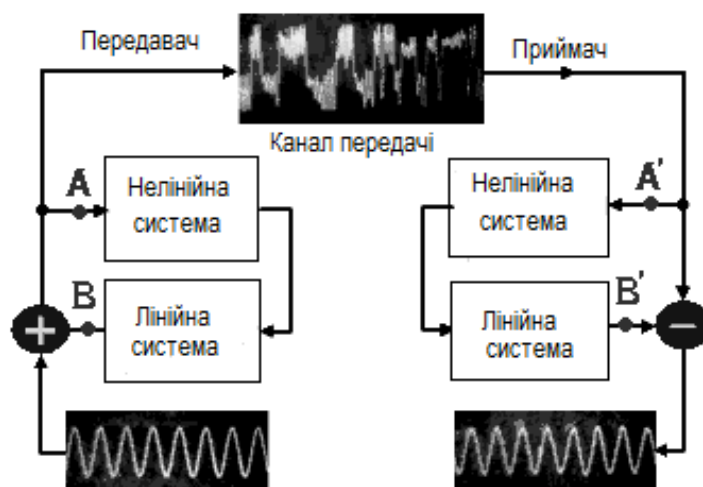


Рисунок 3.15 – Приклад схеми зв'язку з використанням хаосу [19]

Передавач і приймач містять у собі однакові нелінійні й лінійні системи. Додатково в передавач включений суматор, а в приймач – від’ємник. У суматорі проводиться додавання хаотичного сигналу джерела й інформаційного сигналу, а від’ємник приймача призначений для виділення інформаційного сигналу. Сигнал у каналі хаосоподібний і не містить видимих ознак переданої інформації, що дозволяє передавати конфіденційну інформацію. Сигнали в точках  $A$  і  $A'$ ,  $B$  і  $B'$  попарно рівні. Тому при наявності вхідного інформаційного сигналу  $S$  на вході суматора передавача такий же сигнал буде виділятися на виході від’ємника приймача.

Сфера застосування хаотичних сигналів не обмежується системами з розширенням спектра. Вони можуть бути використані для маскування переданої інформації й без розширення спектра, тобто при збігу смуги частот інформаційного й переданого сигналів.

Усе це стимулювало активні дослідження хаотичних комунікаційних систем. До теперішнього часу на основі хаосу запропоновано кілька підходів для розширення спектра інформаційних сигналів, побудови самосинхронізуючих приймачів і розвитку простих архітектур передавачів і приймачів. Ідея більшості запропонованих розв'язків базується на синхронізації "веденої системи" (приймача) і "провідної системи" (передавача). За допомогою таких схем зв'язку можна передавати як аналогову, так і цифрову інформацію з різними швидкостями інформаційних потоків і різним ступенем конфіденційності. Гідністю схем зв'язку з використанням хаосу є також можливість реалізації нових методів поділу каналів, що особливо важливо в багатокористувацьких комунікаційних системах.

Якщо донедавна проблема *конфіденційності* передачі інформації й більш широка проблема *захисту інформації* ставилися в основному до військових і спеціальних застосувань, то тепер усе важливіше стає ринок цивільних додатків. Прикладами можуть служити захист комерційної інформації в комп'ютерах і комп'ютерних мережах, безпека електронних платежів, захист від піратського копіювання CD-ROM, музичних і відеодисків, захист від копіювання музичної, відео- і іншої інформації, розповсюдженої по комп'ютерних мережах, інтернет-телефонія та ін.

До захисту комерційної інформації пред'являються вимоги, що суттєво відрізняються від "класичних". Зокрема, типовою вимогою стає можливість масового застосування й низька собівартість на одиницю "інформаційної" продукції. Крім того, можуть мінятися й підходи до захисту. Так, для захисту музичної й відеоінформації на компакт-дисках від піратського копіювання немає необхідності в тому, щоб записана інформація була повністю недоступна для "зловмисника": цілком достатньо просто знизити якість відтворення до неприйнятної для споживача рівня. При розв'язку таких " побутових " проблем захисту інформації в перспективі можуть успішно застосовуватися засоби, засновані на детермінованому хаосі.

## 4 СИНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД У ДОСЛІДЖЕННІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

### 4.1 Сутність синергетики та самоорганізації систем

Синергетика заснована на принципово новому баченні світу й розумінні процесів розвитку в порівнянні з тим переважним способом бачення, який панував у класичній науці І. Ньютона й П. Лапласа [24]:

- випадковість виключалася як щось зовнішнє й несуттєве;
- процеси, що протікають у світі, представлялися оборотними в часі й передбачуваними на необмежений період;
- еволюція вважалася процесом, позбавленим відхилень, повернень, побічних явищ.

У класичній науці панувало переконання, що *матерії властива тенденція до руйнування всякої впорядкованості, прагнення до хаосу*.

Такий погляд на речі сформувався під впливом вистав рівноважної термодинаміки, науки, що займається процесами взаємоперетворення різних видів енергії. Цією наукою було встановлено, що взаємне перетворення тепла й роботи нерівнозначне: робота може повністю перетворитися в тепло тертям або іншими способами, а от тепло повністю перетворити в роботу принципово неможливо. У формулюванні другого початку термодинаміки Р. Клаузіуса теплота не переходить мимовільно *від холодного тіла до більш гарячого*. Отже, у взаємопереходах одних видів енергії в інші існує *визначена самою природою спрямованість*.

У термодинаміку було введено поняття ентропії, під якою розуміється міра безладдя системи. Більш точне формулювання другого початку термодинаміки прийняло такий вид: *при мимовільних процесах у системах, що мають постійну енергію, ентропія завжди зростає*. Максимальна ентропія означає повну термодинамічну рівновагу, що *еквівалентно хаосу* (чим більше ступінь ентропії в системі, тим менше ступінь порядку).

Але дарвінівська теорія еволюції стверджує, що процес розвитку рослинного й тваринного миру характеризується безперервним ускладненням, *наростанням рівня організації й порядку*. Жива природа прагне прийти до ладу від термодинамічної рівноваги й хаосу.

*Так виявилася «нестиковка» законів розвитку живої й неживої природи.*

Стало ясно, що для збереження несуперечності загальної картини миру необхідно постулювати наявність у матерії в цілому не тільки руй-

нівної, але й творчої тенденції. Матерія здатна здійснювати роботу й проти термодинамічної рівноваги, самоорганізовуватися й самоускладнюватися.

Ці вистави мають глибоке коріння в культурі різних цивілізацій у вигляді ідей про жертовність. Добро й зло, організація й руйнування, народження нового й умирання, численні безглузді й невдалі спроби – усе у світі врівноважене. ***Інферни, зло (у відомому змісті) необхідні, тому що на їхній основі будується добро, організація.*** Жертви необхідні всюди, тому що без них не буде нового. Закон еволюції жорсткий. У світі повинна бути певна частка «зла», хаосу, руйнування, блукання, зряшності, тому що тільки на цій основі може виникнути щось значиме, якого раніше не було.

Синергетика демонструє багатообразність хаосу й сховані потенції малих флуктуацій, випадковостей. Аж ніяк не завжди хаос – зло. Зовсім не у всіх випадках мале й випадкове несуттєві. Синергетика дає цілком конкретну й конструктивну відповідь на запитання: «Коли якійсь випадковості (флуктуації, хаосу на мікрорівні) вдається прорватися й визначити вид загального перебігу подій створюваної структури?».

Для переходу до нової структури необхідний особливий стан відкритого нелінійного середовища – ***стан нестійкості***. Це означає, по суті, чутливість нелінійного середовища до малих флуктуацій, посилюваних за допомогою механізму нелінійного ***позитивного*** зворотного зв'язку. У стані нестійкості фактично укладене щось, що вказує на зв'язок мікро- і макромасштабів. Саме в цих умовах малі збурювання можуть визначити ***макрокартину*** буття, а мале й випадкове має прямий вихід у ***макросвіт***. Людина у станах такого роду може бути чутливою до малих (зовнішніх і внутрішніх) впливів. Наприклад, коли говорять, що людина вмерла від старості, то за цим фактично стоїть переконання, що смерть настала не від якої-небудь конкретної причини, а обумовлена загальним системним руйнуванням людського організму.

Поняття самоорганізації перебуває в центрі сучасних вистав про еволюційні процеси. Те, що системи, надані самі собі, можуть зменшувати ентропію всупереч усім раніше відомим виставам, вперше установив І. Пригожин [23]. Тепер усе ширше усвідомлюється, що ***самоорганізація – це фундаментальний процес природи.***

Установлено, що існують взаємозалежні й взаємообумовлені матеріальні об'єкти з рівноважною й нерівноважною структурною організацією речовини. Одні з них утворюються в ході процесу, що прагне до рівноваги, інші утворюються у ході процесу, що прагне до нерівноваги. Головною особливістю процесу самоорганізації є його ***антиентропійна*** спрямованість.

Термін «самоорганізація» став застосовуватися для позначення природних антиентропійних процесів упорядкування, що мають іншу природу, чим процеси рівноважної організації. Приставка «само-» підкреслює природню зміну стану.

В ідеях І. Пригожина, розвинених Г. Хакеном у синергетику [25], розглядається так звана когерентна самоорганізація. Її механізм пов'язаний з *кооперативною взаємодією безлічі однорідних компонентів*, що приводять до синхронізації внутрішніх процесів і їх когерентній поведінці. Такий механізм Г. Хакен назвав синергетичним (від грецького synergia – спільна кооперативна дія). Приклад – синхронізація метрономів.

Узагальнюючи вищевикладене, можна відзначити, що синергетика – це науковий напрямок, що вивчає *процеси утвору й колективних взаємодій об'єктів* (елементів, підсистем), таких:

- що відбуваються у відкритих системах при нерівноважних умовах;
- що супроводжуються інтенсивним обміном речовиною й енергією підсистем із системою й системи з навколишнім середовищем;
- що характеризуються мимовільністю (відсутністю твердої детермінації ззовні) поведінки об'єктів (підсистем), які взаємодіють між собою;
- що мають результатом упорядкування, самоорганізацію, зменшення ентропії, а також еволюцію систем.

#### **4.2 Синергетична концепція самоорганізації нелінійних систем**

Узагальнення результатів, отриманих фахівцями у зв'язку з дослідженнями із синергетики, дозволяє визначити синергетичну концепцію самоорганізації у вигляді наступних положень [24].

1. Об'єктами дослідження є відкриті системи в нерівноважному стані, що характеризуються інтенсивним обміном речовиною й енергією між підсистемами, а також між системою і її оточенням.

2. Системи різняться процесами організації й самоорганізації. Їхня загальна ознака – зростання порядку, обумовлене протіканням процесів, протилежних устанавленню термодинамічної рівноваги, незалежно від впливу взаємодіючих елементів зовнішнього середовища.

3. Результатом самоорганізації стають виникнення, взаємодія, а також взаємосприяння (кооперація) більш складних в інформаційному змісті об'єктів, чим елементи зовнішнього середовища, з яких вони виникають. Система і її складові є динамічними утворами.

4. Спрямованість процесів самоорганізації обумовлена внутрішніми властивостями підсистем у їхньому індивідуальному й колективному прояві, а також впливами з боку середовища, у яке «занурена» система.

5. Поведінка підсистем і системи в цілому характеризується спонтанністю – акти поведінки не є строго детермінованими.

6. Процеси самоорганізації відбуваються в середовищі поряд з іншими процесами, зокрема з такими, що мають протилежну спрямованість і здатними в окремі фази існування системи як переважати над процесами самоорганізації, так і уступати їм. При цьому система в цілому може характеризуватися стійкою тенденцією, коливаннями до еволюції або до деградації й розпаду.

Синергетика змушує нас по-новому осмислити те, що становить скарбницю прадавньої мудрості, насамперед мудрості Прадавнього Сходу. Від Сходу синергетика сприймає й розбудовує ідею **цілісності загального закону, єдиного шляху, якому слідують і мир у цілому, і люди у ньому**.

Так, наприклад, людина у відповідності із принципом дао повинна узгоджувати свою поведінку із природою людини й природою Всесвіту. При дотриманні принципу дао можливо потрібні бездіяльність та недіяння, які приведуть проте до повної волі, щастя й процвітання. Той же, хто не слідує дао, приречений на загибель і невдачу. Всесвіт, так само як і індивід, не можна привести до порядку й гармонії штучним чином, для цього потрібно дати волю й спонтанність розвитку їх природженим внутрішнім якостям. У дао всі речі рівні між собою й усе поєднується в єдине ціле: Всесвіт і індивід, вільний і раб, виродок і красень. Мудрець, що слідує дао, однаково ставиться до всіх і не засмучується ні про життя, ні про смерть, розуміючи й ухвалюючи їх неминучість і природність.

На відміну від мудрості сходу Захід дає синергетиці **традиції аналізу, опору на експеримент, загальнозначимість наукових висновків, їх передачу** від однієї школи в науці до іншої, від науки до суспільства в цілому через наукові тексти, особливий математичний апарат.

Синергетика має власну мову. Це мова таких понять, як «атрактори», «біфуркації», «фрактали» і «детермінований хаос».

Поняття *атрактора* близько поняттю мети. Останнє можна розкрити в широкому змісті як спрямованість поведінки нелінійної системи, «кінцевий стан» (кінцевий відносно того, що завершує деякий етап еволюції) системи. Під атрактором у синергетиці розуміють відносно стійкий стан системи, який як би притягає до себе безліч «траєкторій» системи, обумовлених різними початковими умовами. Якщо система попадає в басейн атрактора, вона неминуче еволюціонує до цього відносно стійкого стану або стійкої структури.

Поняття «*біфуркація*» на рівні математичного опису означає розгалуження розв'язків нелінійного диференціального рівняння. Фізичний зміст біфуркації такий: точка біфуркації – це точка розгалуження шляхів еволюції системи. Іншими словами, нелінійна система таїть у собі біфуркації.

*Фракталами* називаються об'єкти, що володіють властивістю самоподоби. Це означає, що малий фрагмент структури такого об'єкта подібний



іншому, більшому фрагменту або навіть структурі в цілому. Властивість фрактальності має аналоги в глибинах філософської думки, а саме у філософських виставах про *монадність* елементів миру. Кожна монада, по Лейбніцу, відбиває, як у дзеркалі, властивості миру в цілому. Цей же образ присутній у східному принципі світовідчуження — «усе в одному й одне у всім». Типові фрактальні об'єкти — хмари або берегова лінія моря (ріки); їхній малюнок подібний і повторюється в різних масштабах.

Синергетика розглядає *детермінований хаос* як випадковість, що відіграє особливу роль у процесах самоорганізації. Випадковість мовою синергетики називається флуктуаціями. Випадковість – це творчий, конструктивний початок. Вона здатна відігравати роль механізму, що виводить систему на атрактор, на одну із власних структур середовища, на внутрішню тенденцію її організації. Нелінійне середовище починає саме себе вишиковувати, організовувати, але необхідний хаос для ініціювання цього процесу, тобто деякий початковий спусковий механізм.

Динамічна система, яка в хаотичнім середовищі має точки біфуркації, здобуває властивості самоорганізованої критичності. Поведінка в околиці точки біфуркації характеризується тим, що при малому збурюванні система може повністю змінити свою модель поведінки. Класичним прикладом самоорганізованої критичності є піщана купа.

### 4.3 Модель самоорганізованої критичності

Розглянемо куточок з піском, зображений на рисунку 4.1. Будемо припускати зчеплення між піщинами досить великим. При цьому можливо лише поверхнєве переміщення піску, причому інерцією його руху можна зневажити. Тоді стан системи цілком визначається нахилом поверхні. У тих місцях, де *локальний нахил* виявляється більше порога стійкості, відбувається осипання, що приводить до зісковзування піщин униз по схилу на сусідні ділянки поверхні.

Стан піску визначається кутом нахилу поверхні  $z$ . При його зміні відбувається безперервний фазовий перехід від нерухливого стану ( $J = 0$ ) до стану безперервного струму піску ( $J > 0$ ). Залежність параметра порядку від керуючого параметра наведена на урізанні. При струмі  $J = +0$ , що відповідає додаванню однієї піщини за один крок, система самоорганізується в стан із критичним нахилом  $z = z_c$ .

Якщо середній нахил поверхні  $z$  невеликий, то пісок нерухливий. Якщо ж нахил перевищує деяке значення  $z_c$ , виникає спонтанний струм піску  $J$  по поверхні, який безупинно зростає при збільшенні  $z$  (див. урізання на рис. 4.1). Тобто, у наявності безперервний фазовий перехід, у якому керуючим параметром є нахил  $z$ , а параметром порядку – струм піску  $J$ .

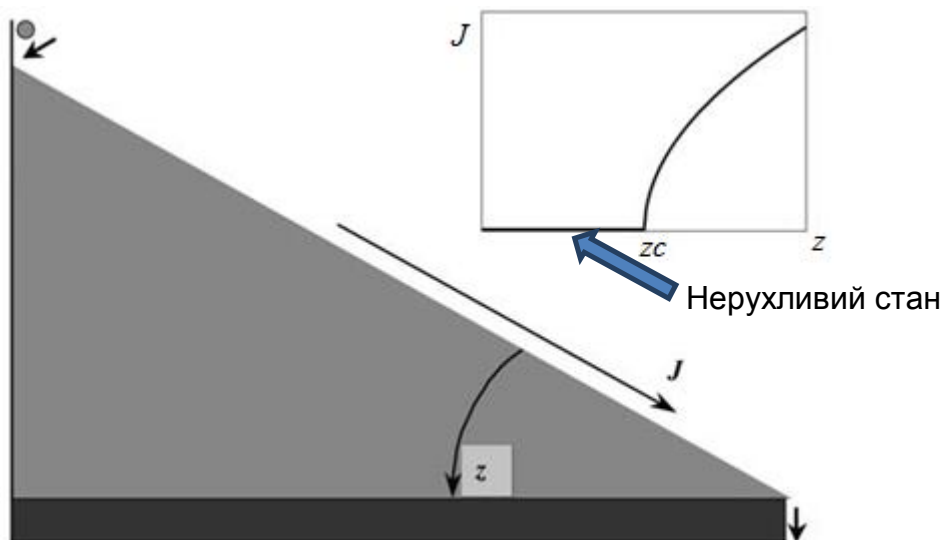


Рисунок 4.1 – Куточок з піском

Критичне значення нахилу  $z_c$  розділяє хаотичну ( $z < z_c$ ) і впорядковану ( $z > z_c$ ) фази. Обидві ці фази відповідають некатастрофічній поведінці, оскільки в них система стійка до малих збурювань. У хаотичній фазі вони ще швидко загасають у часі й просторі, а в упорядкованій уже не можуть відчутно вплинути на величину струму. І лише в критичній точці, де одна додана піщина може викликати лавину будь-якого розміру, можливі катастрофи.

Критичний стан виникає, коли параметр порядку ледь стає ненульовим, тобто відповідає моменту його відриву від нуля. У випадку звичайних критичних явищ такий стан досягається шляхом тонкого підстроювання. Однак, замість того, щоб підбирати для керуючого параметра *a priori* невідоме критичне значення, можна встановити параметр порядку в  $+0$ , що змусить керуючий параметр самостійно відшукати критичну точку.

Інакше кажучи, замість того, щоб крутити ручку приладу, можна почати зрушувати з нульової оцінки стрілку на його шкалі, змушуючи ручку повернутися до потрібного положення. Таке керування параметром порядку зазвичай досягається за допомогою розділення *тимчасових масштабів*, при якому час релаксації системи багато менше часу між послідовними збурюваннями, тобто коли події відбуваються рідко.

Самоорганізація купи піску відбувається при струмі  $J = +0$ .

Щоб забезпечити таку величину параметра порядку, будемо розглядати динаміку по кроках, додаючи піщини по одній на вершину купи (див. мал. 2) і чекаючи завершення процесу релаксації. При цьому струм піску через систему, мабуть, має мінімально можливе значення – у середньому одна піщина за один крок розгляду.

Якщо нахил поверхні малий, то лавина, викликана доданою піщиною, швидше за все, не досягнеться краю купи й нахил збільшиться. При дуже великому нахилі стан купи є метастабільним, тобто на будь-яке збурювання вона відповість глобальною подією, у результаті якої велика кількість піску покине систему й нахил поменшається. Рівновага між кількістю піску, що додається в систему, і кількістю піску, що покидає її, досягається при критичному нахилі поверхні, коли збурювання може поширюватися по купі як завгодно далеко, не загасаючи й не розростаючись.

Таким чином, має місце *негативний зворотний зв'язок*, що змушує нахил прийняти згодом значення  $z = z_c$  незалежно від початкового профілю поверхні. При цьому купа піску, що полягає з локально взаємодіючих піщин, починає поводитися як єдине ціле. Тобто, у результаті самоорганізації в критичний стан система здобуває властивості, яких не було в її елементів, демонструючи складну цілісну поведінку. При цьому немаловажне, що самоорганізаційна природа цілісних властивостей забезпечує їх грубість.

### Моделювання купи піску

Поведінка розглянутої системи може бути описана мовою клітинних автоматів. Найпростішою моделлю купи піску служить автомат, запропонований Д. Дхаром і Р. Рамасвами. Ілюстрація цієї моделі показана на рисунку 4.2.

Зіставимо купі двовимірні клітини розміром  $L \times L$ , горизонтальні шари якої умовно відповідають лініям рівня поверхні. У клітинах розташовані цілі числа, що характеризують *локальний нахил* поверхні купи. Якщо число перевищує одиницю, клітина оголошується нестійкою й *обсипається*, що виражається в зменшенні на 2 вартості в ній числа з одночасним збільшенням на 1 значень у *двох клітинах*, що примикають до даної клітини *знизу*.

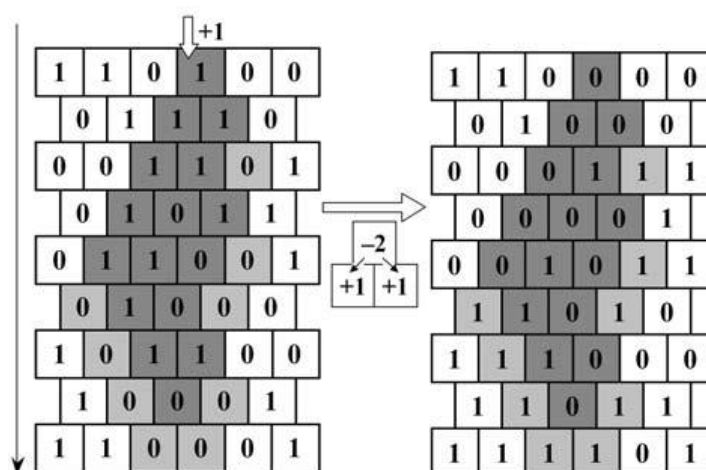


Рисунок 4.2 – Клітинний автомат для купи піску

Лавина ініціюється додаванням однієї піщини у випадково обрану клітину верхнього шару.

Ліворуч наведений стан системи до опадання лавини, праворуч – після опадання. Заливанням показані області лавини й клітини на її границі, які, одержавши піщинку, зберегли стійкість.

Крок моделювання складається зі збурювання й *релаксації*. Збурювання стійкого стану проводиться шляхом збільшення на одиницю значення у випадково обраної клітини верхнього шару, що відповідає додаванню однієї піщини на вершину купи піску. Якщо в результаті збурювання клітина втрачає стійкість, то вона обсипається й починається процес релаксації. Опадання клітини приводить до збільшення нахилу в клітинах нижнього шару, що, в свою чергу, здатне порушити їхню стійкість і т.д. за принципом ланцюгової реакції. Таким чином, втрата стійкості однією клітиною може викликати *лавину опадань*, яка триває доти, поки всі гнізда знову не знайдуть стійкість. Після цього релаксаційний процес вважається завершеним.

Концепція самоорганізованої критичності — це холістична теорія (холізм – філософія цілісності). Вона має на увазі, що глобальні характеристики, такі, як відносне число великих і малих подій, не залежать від мікроскопічних механізмів. Саме тому глобальні характеристики системи не можна зрозуміти, аналізуючи її частини окремо. Концепція самоорганізованої критичності – це єдина модель, або математичний опис, який привів до холістичної теорії динамічних систем.

#### 4.4 Синергетичний підхід до управління виробничою діяльністю

Традиційний підхід до керування процесами заснований на лінійній виставі про функціонування систем. Згідно із цією виставою результатом зовнішнього керуючого впливу є однозначний і лінійний наслідок прикладених зусиль, що відповідає схемі: *керуючий вплив* → *бажаний результат*.

Суть синергетичного підходу до керування полягає в іншому: у тому, що він орієнтований не на зовнішнє, а на внутрішнє, на щось іманентне (притаманне чомусь, властиве) самому середовищу. Іншими словами, він орієнтований не на бажання та наміри суб'єкта експериментальної, конструкторської, реформаторської й т.п. діяльності, а на власні закони еволюції й самоорганізації складних систем.

При цьому зовнішній керуючий вплив на нелінійну систему може бути ефективним тільки тоді, коли він погоджений із внутрішніми властивостями цієї системи, тобто є резонансним. Якщо «уколювати» систему в потрібний час і в потрібному місці, вона буде розгортати все багатство сво-

їх форм і структур. Відповідно до загальних принципів синергетичного світогляду необхідно не просто будувати або перебудовувати, а ініціювати, виводити системи на власні лінії розвитку.

З погляду синергетики неефективне керування природною, когнітивною або соціальною системою полягає в нав'язуванні системі якоїсь форми організації, невластивої та далекої цій системі [26]. Таке керування (у найкращому разі) робить усі людські зусилля пошуками, «що йдуть у пісок», а в гіршому – навіть завдає справжньої шкоди, приводить до небажаних і важко виправляємих кризових станів (приклад – спроба побудувати соціалізм у геополітичному просторі колишнього Радянського Союзу). З такого роду «ефектом бумеранга» зустрічається людина, якщо вона не бере до уваги неоднозначні, нелінійні зворотні впливи складноорганізованих ієрархічних систем на людину, людство, біосферу, космос.

Практично вся історія керування галузями сучасного машинобудування, орієнтованого на випуск масової й крупносерійної продукції, являє собою пошук оптимального компромісу між перевагами масштабності виробництва й прагненням розширювати товарну номенклатуру. Особливо явно цей процес протікає в автомобілебудуванні. Японська автомобільна компанія «Тойота» стала піонером у застосуванні нового підходу до організації гнучкого виробництва. Керівники «Тойоти» прийшли до висновку, що питання «робити або купувати?» не є особливо важливим. На їхню думку серйозна проблема полягала в тому, щоб забезпечити взаємодію складального заводу і його постачальників, добитися за рахунок *кооперації* зниження вартості комплектуючих і підвищення якості продукції незалежно від формальних, юридичних відносин між збирачем і постачальниками.

Оптимізація існуючих виробничих систем у концепції «гнучкого виробництва» повинна здійснюватися в основному шляхом аналізу витрат *на кожному виробничому етапі*. Результати цього аналізу використовуються при вдосконалюванні процесів виробництва й постачання, які після впровадження нововведень знову зазнають оптимізаційного аналізу.

Класичне визначення синергетичних зв'язків полягає у тому, що це такі зв'язки, які при *кооперованих* (спільних) діях незалежних елементів системи забезпечують збільшення загального ефекту до величини більшої, ніж сума ефектів цих же, але незалежно діючих елементів. Іншими словами, *якщо удосконалювати кожний із окремих елементів системи, то ефект буде значно меншим, ніж тоді, коли удосконалюються зв'язки між елементами*. Приклади кооперації спостерігаються у природі, коли птахи, риби і тварини збираються у стаї.

Функціональною суттю самоорганізованих процесів є самостворення, самозбереження, самовдосконалення й самовідтворення порядку в структурі й функціонуванні системи. Як приклад може виступати виробнича система, економічний розвиток у якій обумовлює існування процесів якісних і кількісних змін. Очевидно, що така система є нелінійною. Кож-

ний елемент й компонент виробничої системи (людина, підрозділ, установа, регіон, галузь) можна розглядати як самостійний організм, що саморегулюється та саморозвивається. Цей організм містить у собі внутрішні фактори підтримки своєї рівноваги, які запобігають його руйнуванню.

Однією з істотних характеристик еволюції виробничої системи є необоротність. Необоротність полягає в неможливості зміни спрямованості процесів у кожний даний момент часу. Але такій системі притаманні хвилеподібні коливання системної динаміки: підйом — спад — криза — пожевлення — підйом і т.д., як показано на рисунку 4.3.

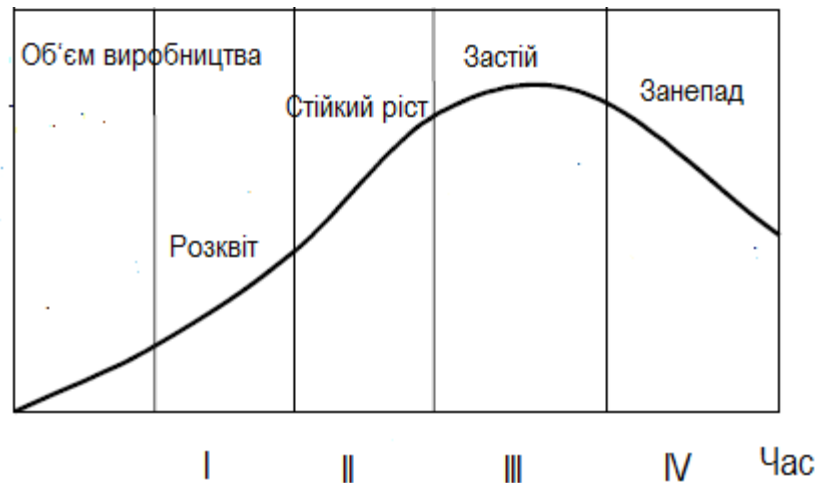


Рисунок 4.3 – Графічна вистава динаміки виробничої системи

Вони характеризуються тим, що початок підйому кожного циклу пов'язаний із внутрішньосистемними змінами, а кожний спад супроводжується затяжними депресіями найбільш значимих системних компонентів. При переході від одного режиму функціонування до іншого відбувається втрата стійкості старих атракторів і виникає стійкість атракторів нового режиму функціонування. Частина фазової кривої до її влучення в атрактор може бути названа нестационарною поведінкою динамічної системи. У середині атрактора фазова крива виражає стаціонарну поведінку системи.

Можливі чотири типи динаміки виробничих систем:

I тип. Стабільний процес підйому, системного оздоровлення – розквіт (нестационарна поведінка).

II тип. Стабільний процес функціонування системи, еволюційний розвиток – стійкий ріст (стаціонарна поведінка).

III тип. Стабілізація в одній точці процесу – застій (стаціонарна поведінка).

IV тип. Стабільний процес занепаду, руйнування суспільних зв'язків під час глибоких деформацій, іншими словами – занепад, криза (нестационарна поведінка).

## 4.5 Фрактальні фабрики

Однією з базисних теорій керування може стати синергетична теорія атракторів. Ця теорія розширює представлення про можливість передбачити хід подій і впливати на ситуацію. Х.-Ю.Варнеке застосував ідею створення структур-атракторів до підприємницької діяльності [27]. Концепція Х.-Ю.Варнеке полягає у створенні «фрактальних фабрик», де під фракталом розуміється *самостійно діюча структурна одиниця підприємства, яка може самоорганізовуватися*.

Кожний фрактал має своє завдання, точніше, у процесі функціонування фрактали ставлять і формулюють ці завдання. Фрактали можуть перетворюватися, виникати знову й розпадатися. Вони групуються без зовнішнього тиску, щоб служити цілому. Однією з найважливіших вимог до «фрактальної фабрики» є здатність усіх її підрозділів і всіх співробітників до підприємницького мислення й діяльності. Самоорганізація сприяє тому, що гарні ідеї реалізуються незалежно від того, звідки вони з'явилися.

«Фрактальній фабриці» властиві також централізовані функції. Тут концентрується спеціальна інформація, яка у фракталах не може зберігатися постійно. Але всі допоміжні засоби, що стосуються організації, надходять у розпорядження всіх фракталів. Насамперед це ставиться до можливості мати інформацію, яка більше не монополізується.

Кожний фрактал і в остаточному підсумку кожне робоче місце розглядаються як ціле підприємство: певна робота повинна виконуватися комплексно, а окреме завдання вирішуватися самостійно. Кожний фрактал повинен бути фрактальною фабрикою меншого розміру.

Глобальні завдання реалізуються локально, тобто раціонально сформульовані загальні глобальні цілі стають конкретними діями. Щоб це відбувалося синхронно у всіх фракталах, їхня цільова настанова формулюється конкретним чином.

Кінцеві результати функціонування фрактала постійно вимірюються й оцінюються. Для того, щоб вони успішно діяли в нелінійній середовищі, необхідно правильно оцінювати позицію кожного, а також позиції й напрямки руху інших учасників.

Цільова система (сукупність цілей), що складається із цілей фракталів, повинна бути спрямована на досягнення загальних цілей підприємства. Цілі генеруються й коректуються в ітераційному процесі узгодження між фракталами-учасниками так, щоб цілі різних фракталів не були суперечливими. Однорідність цілей — ключ до максимального використання людських ресурсів на «фрактальній фабриці».

Усі процеси на підприємстві (прийняття рішень, виробнича діяльність і т.п.) взаємозалежні, Цей зв'язок носить зворотний характер. Певні

дії стають причиною інших дій, а ті, у свою чергу, стають відправною точкою нових розробок. У подібній системі співробітники утворюють комунікаційну структуру із широкою автономією, якою вони управляють і яка тимчасово управляє ними. Керівники більше не спостерігають за діями своїх співробітників, а визначають завдання й цілі, щоб кожний знав, що потрібно робити. Властивість автономності означає, що реакція системи визначається головним чином її структурою, внутрішніми зв'язками, а не зовнішніми силами й сигналами. В якості прикладу такої структури можна назвати КВЦ «НКМЗ-Автоматика».

Механізм, який виводить систему на атрактор, на її внутрішню тенденцію до організації, криється в ідеях нововведення, що виникають у співробітників організації. Ці ідеї, по суті, являють собою флуктуації. Природно, що успішно реалізуються тільки ті ідеї, для яких існують відповідні ринки й області застосування. Саме в такий спосіб на перетинанні двох видів випадкових флуктуацій – внутрішньої інноваційної й зовнішньої ринкової мінливості – формуються стратегія підприємства, її структура керування.

Важливо те, що у саморозвиваючихся системах упорядкованість і саморозвиток обумовлені **утворенням кооперативних зв'язків**. Поняття організації, як альтернативи поняттю самоорганізації, пов'язане зі свідомою діяльністю людини. Результатом такого симбіозу є процес коеволюції, як спільний розвиток природних і виробничих технологій у рамках системи взаємодії (у біології, наприклад, – взаємне пристосування видів). У процесі коеволюції вирішальну роль відіграють не боротьба за існування, а взаємодопомога, погодженість і співробітництво. Коеволюційний підхід виділяє із усієї сукупності змін ті, які сполучені, взаємно адаптовані. Взаємозв'язок коеволюційних змін виконує двояку функцію – збереження цілісності системи й участь у становленні нової цілісності.

Однак, у той же час коеволюційний підхід затверджує, що в реальному світі протистоять одна іншій не дві сутності – природа й суспільство, а три: природа, суспільство й створюваний людиною предметний мир. Визнання самоорганізуючих властивостей системи в розвитку організації дозволяє побачити останню в новім світлі, по-новому інтерпретувати знайомі явища й, можливо впоратися з окремими проблемами, які при традиційному підході видадуться нерозв'язними. Процес самоорганізації підтверджує, що будь-який, навіть сприятливий стан справ потрібно розглядати як миттєве в проміжному еволюційному процесі відновлення. Важливо усвідомити ідею, що метою системи є те, що вона робить, і, якщо поведінка організації не видається раціональною, то це означає, що певне розуміння цілей відрізняється від дійсних цілей організації.



#### 4.6 Особливості функціонування складних саморегулювальних систем

Сучасна наукова й технологічна діяльність все частіше має справи з складними саморегулювальними системами. Їх важливо відрізнити не тільки від простих систем, але й від великих систем [28].

Для опису *простих систем* досить уважати, що сумарні властивості їх частин вичерпно визначають властивості цілого. Частина усередині цілого й поза цілим має ті самі властивості, зв'язки між елементами підкоряються лапласовській причинності, простір і час з'являються як щось зовнішнє стосовно таких систем, стани їх руху ніяк не впливають на характеристики простору й часу.

*Великі системи* мають цілий ряд нових характеристичних ознак. Вони диференціюються на відносно автономні підсистеми, у яких відбувається масова, стохастична взаємодія елементів. Цілісність системи припускає наявність у ній особливого блоку керування, прямі й зворотні зв'язки між ним і підсистемами. Великі системи гомеостатичні, тобто вони підтримують свій стан в визначених межах. У них обов'язково є програма функціонування, яка визначає керуючі команди й коректує поведінку системи на основі зворотних зв'язків.

Прикладами великих систем являються *верстати з числовим програмним управлінням, системи автоматичного управління обладнанням, автоматизовані системи регуляції вантажних потоків із застосуванням комп'ютерних програм і т.п.*

Але стосовно до *складних саморегулювальних систем* категорії частини й цілого мають другі характеристики. Ціле вже не вичерпується властивостями частин, *виникає системна якість цілого*. Частина усередині цілого й поза ним має *різні властивості*. Так, органи й окремі клітини в багатоклітинних організмах спеціалізуються й у цій якості існують тільки в рамках цілого. Будучи виділеними з організму, вони руйнуються (гинуть), що відрізняє складні системи від простих механічно з'єднаних систем, наприклад, тих же механічних годинників, які можна розібрати на частині й із частин знову зібрати колишній працюючий механізм.

Дослідження складних саморегулювальних систем особливо активізувалося з виникненням кібернетики, теорії інформації й теорії систем. З'ясувалися принципові обмеження застосування класичних понять «координата» і «імпульс», «енергія» і «час» (співвідношення невизначеності). Був сформульований принцип додатковості причинного й часово-просторового опису, що внесло нові корективи в розуміння відповідних категорій. Вироблялася вистава про імовірнісну причинність як доповнення до жорсткої (лапласовської) детермінації.

Сьогодні пізнавальне й технологічне освоєння складних саморозвиваючихся систем починає визначати стратегію переднього краю науки. До

таких систем ставляться біологічні об'єкти, розглянуті не тільки в аспекті їх функціонування, але й в аспекті розвитку, об'єкти сучасних біотехнологій і насамперед генетичної інженерії, системи сучасного проектування, коли береться не тільки та або інша техніко-технологічна система, але ще більш складний комплекс, що розвивається, – людино-техніко-технологічна система, плюс екологічна система, плюс культурне середовище. Усе це ухвалює нову технологію.

До саморозвиваючихся систем відносяться сучасні складні комп'ютерні мережі, які припускають діалог людина-комп'ютер, наприклад, інтернет. До типу складних саморозвиваючихся систем належать також всі соціальні об'єкти, розглянуті з обліку їх історичного розвитку. До дослідження складних систем впритул підійшла й фізика. Довгий час вона виключала зі свого пізнавального арсеналу ідею історичної еволюції. Але в другій половині ХХ в. виникла інша ситуація. З одного боку, розвиток сучасної космології (концепція Великого вибуху й інфляційної теорії розвитку Всесвіту) привели до ідеї становлення різних типів фізичних об'єктів і взаємодій. Виникла вистава про процеси еволюції різних видів елементарних часток і їх взаємодій, як результату розщеплення деякої вихідної взаємодії й наступної його диференціації. Також ідея еволюційних об'єктів активно розробляється в рамках термодинаміки нерівноважних процесів (І. Пригожин) і синергетики. Взаємовплив цих напрямків дослідження інкорпорує в систему фізичного знання вистави про самоорганізацію й розвиток.

Освоєння саморозвиваючихся систем припускає розширення поняття «причинність». Воно зв'язується з виставами про ***перетворення можливості в дійсність***. Цільова причинність, яка розуміється як характеристика саморегуляції й відтворення системи, доповнюється ідеєю спрямованості розвитку. Цю спрямованість не слід тлумачити як фатальну зумовленість. *Випадкові флуктуації у фазі перебудови системи (у точках біфуркації) формують аттрактори, які в якості свого роду програм-цілей ведуть систему до деякого нового стану й змінюють можливості (імовірності) виникнення інших її станів.*

Спектр напрямків еволюції системи після виникнення аттракторів трансформується, деякі, раніше можливі напрямки стають закритими. Виникнення нового рівня організації, як наслідку попередніх причинних зв'язків виявляє на них зворотний вплив, при якому наслідок функціонує вже як причина зміни попередніх зв'язків (кільцева причинність).

Стосовно до саморозвиваючихся систем виявляються і нові аспекти категорій простору. Нарощування системою нових рівнів організації супроводжується зміною її внутрішнього простору-часу. У процесі диференціації системи й формування в ній нових рівнів виникають своєрідні «просторово-часові вікна», що фіксують границі стійкості кожного з рівнів і обрії прогнозування їх змін.

Серед нових ідей і вистав, які внесла синергетика (динаміка нелінійних систем) у розуміння розвитку, особливо слід виділити два зв'язані між собою відкриття.

*По-перше, уявлення про кооперативні ефекти, що визначають відтворення цілісності системи.*

*По-друге, концепцію динамічного хаосу, що розкриває механізми становлення нових рівнів організації, коли випадкові флуктуації в станах нестійкості приводять до формування атракторів у нелінійній середовищі й наступному виникненню нових параметрів порядку.*

Те, що в традиційному діалектичному описі розвитку структурно не аналізувалося, а просто позначалося як «стрибок», «перерва поступовості», «перехід у нову якість», тепер стало предметом наукового аналізу.

Синергетика внесла цілий ряд важливих конкретизацій у розуміння механізмів розвитку. Разом з тим вона має й границі застосовності. Там, де мова йде про малі (прості) системи, де для розв'язку тих або інших пізнавальних і практичних завдань можна абстрагуватися від розвитку й фазових переходів, там застосування синергетичної термінології надлишково.

*Синергетика зосереджує увагу на процесах нестійкості, станах динамічного хаосу, що породжують ту або іншу організацію, порядок. Теоретичний опис цих процесів заснований на введенні особливих ідеалізацій.*

Будь-яка система взаємодіє з іншими системами. Вона може входити в більш складні системи й разом з тим включати в якості своїх підсистем інші системи (часто стосовні до складних організованостей). Вона може обмінюватися речовиною, енергією, інформацією з навколишніми її системами. Уся ця складна мережа взаємодій може бути представлена інтегрально як нелінійне середовище.

Ідеї синергетики сьогодні претендують на роль фундаментальних вистав загальнонаукової картини миру. Багато в чому саме із цими претензіями зв'язані суперечки навколо синергетики, визнання або невизнання її ідей як стратегії сучасних досліджень. Користь же конкретних моделей синергетики (динаміки нелінійних систем) мало хто бере під сумнів.

#### **4.7 Методологія дослідження саморозвиваючихся систем клітинними автоматами**

Ідея клітинних автоматів була сформульована Джоном фон Нейманом і Конрадом Цусе незалежно друг від друга як універсальне обчислювальне середовище для побудови, аналізу й порівняння характеристик алгоритмів.

Клітинні автомати є дискретними динамічними системами, поведінка яких повністю визначається в термінах локальних залежностей. У цьому змісті клітинні автомати в інформатиці є аналогом фізичного поняття «поля» – клітинний автомат може мислитися як стилізований світ. Простір представлений рівномірною сіткою, кожне гніздо або клітка якої містить декілька біт даних; час іде вперед дискретними кроками, а закони виражаються єдиним набором правил, скажемо, невеликою довідковою таблицею, по якій будь-яка клітка на кожному кроці обчислює свій новий стан по станах її близьких сусідів. Таким чином, закони системи є локальними й усюди однаковими. «Локальний» означає, що для того, щоб довідатися, що відбудеться тут через мить, досить подивитися на стан найближчого оточення: ніяка дальнодія не допускається. «Однаковість» означає, що закони скрізь ті самі: можна відрізнити одне місце від іншого тільки за формою ландшафту, а не по якійсь різниці в законах.

Що потрібно для створення клітинного автомата?

По-перше, вибрати необхідну площину (нескінченну або кінцеву) та розділити її на клітки. Існують автомати із квадратними клітками, а також трикутними і шестикутними клітками, які можна моделювати за допомогою КА із квадратними клітками. При цьому кожна із кліток може бути в одному зі станів з певного набору станів.

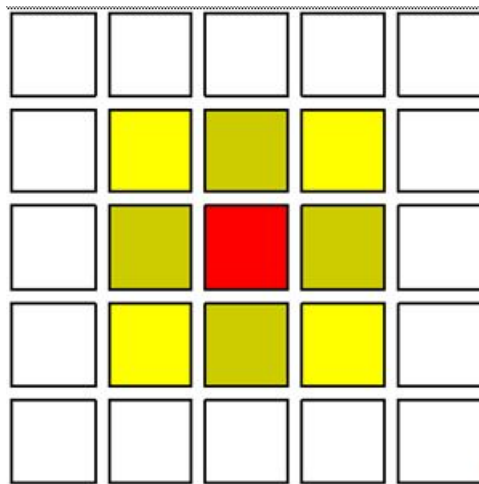
По-друге, передбачити годинник, час у клітинному автоматі повинен змінюватися дискретно.

І по-третє, створити набір правил, який буде визначати поведінку автомата.

Для запуску автомата необхідно наступне:

1. Задається початковий стан усіх кліток КА.
2. Для кожної із кліток за певними правилами зі стану кліток-сусідів і самої клітки обчислюється наступний її стан.
3. На кожному кроці клітки міняють свій стан одночасно.

Особливо треба визначити сусідів клітки (або її околиці). Якщо в розрахунки беруться сама центральна клітка й клітки, що стикаються з нею тільки сторонами (їх чотири), така околиця називається околицею фон Неймана (рисунок 4.4), а якщо із центральною кліткою клітки околиці стикаються не тільки сторонами, але й кутами, така околиця називається околицею Мура.



*Рисунок 4.4 – Квадратна решітка клітинного автомата*

Слід зазначити, що клітинні автомати – це не просто машини, що працюють із розбитим на клітки полем. Область застосування клітинних автоматів майже безмежна: від найпростіших «хрестиків-нуликів» до штучного інтелекту. Тема клітинних автоматів дуже актуальна, тому що може привести до розгадок багатьох питань у навколишньому світі. Творець гри «Життя» Конуэй, уважав, що наш всесвіт можна представити клітинним автоматом, який управляє рухом елементарних часток відповідно до деяких правил.

Клітинні автомати використовуються для моделювання гідродинамічних і газодинамічних плинів. Рівняння гідродинаміки відповідають математичній моделі, що описує поведінку гратчастого газу, одного із клітинних автоматів, на макрорівні. Структури, що виникають у цих клітинних автоматах, схожі на збурювання поведінки поверхні потоку рідини механічною перешкодою. Примітивні одномірні клітинні автомати можуть моделювати процес горіння різного характеру. У цей час теорія клітинних автоматів найбільше перспективно прикладена до питання про розробку самовідновлюваних електронних ланцюгів.

Клітинні автомати застосовні не тільки в математиці й фізиці, а також у біології, економіці, соціології, інформатиці і т.д. За допомогою клітинних автоматів успішно вирішувалися завдання моделювання плинів з вільною границею, поширення теплових потоків, росту й динаміки доменів, росту дендритів, опису руху юрби. Їх можна використовувати при складанні генетичних алгоритмів.

Уявимо собі клітинний автомат, для кліток якого додатковою умовою виживання є виробіток деякої послідовності вихідних даних (назвемо її умовно реакцією) у відповідь на послідовність вхідних даних (роздратування, що є властивістю середовища) наступний стан, що пророкує, середовища. Щоб такий автомат функціонував, додається також механізм випадкової зміни правил виробітку реакції (мутації) і передачі знову виникаючим кліткам інформації про правила реагування сусідів (спадкування).

Крім дослідження умов розвитку моделей живих систем, такий підхід дозволяє вирішувати й деякі практичні завдання, зокрема пошук найкоротшого шляху на графові. Структура графа кодується деяким чином у хромосомах кліток. Передбачається, що алгоритми, придбані внаслідок мутацій і спадкування, будуть відповідати розв'язкам завдання.

По своїй поведінці клітинні автомати діляться на чотири класи. До першого класу ставляться автомати, що приходять через певний час до стійкого однорідного стану. Автомати другого класу через якийсь час після пуску генерують стаціонарні або періодичні в часі структури. В автоматах третього класу по закінченні деякого часу перестає спостерігатися кореляція процесу з початковими умовами. Нарешті, поведінка автоматів четвертого класу сильно визначається початковими умовами й з їхньою допомогою можна генерувати досить різні шаблони поведінки. Такі автомати є кандидатами на прототип клітинної обчислювальної машини. Зокрема, за допомогою специфічних клітинних конфігурацій гри «Життя», яка саме і є автоматом четвертого типу, можна побудувати всі дискретні елементи цифрового комп'ютера.

Клітинні автомати застосовні при реалізації ефективної системи розпізнавання образів. Один з можливих шляхів її створення – побудова динамічної системи, атрactorами якої в її конфігураційному просторі були б типові картини-образи. Початкові умови завжди виявляться в області притягання однієї з картин, із часом система трансформує початкові параметри, привівши їх до найбільш близької структури – атрactorу. Тобто відбудеться автоматичне розпізнавання образу. Причому можна створювати системи, що навчаються розпізнаванню, у них закони еволюції мають стан програмування. Використовувати клітинні автомати можна й при розв'язку оптимізаційних завдань. Часто в різних сферах діяльності виникають завдання знаходження оптимального варіанта з необмеженого числа можливих. Точного розв'язку, як правило, не потрібно, але дискретний комп'ютер не здатний навіть приблизно дати оптимальний результат. Відзначимо ще одне застосування клітинних автоматів в інформатиці – шифрування й стиск даних.

#### **4.8 Приклади найпростіших клітинних автоматів**

Найпростіші клітинні автомати використовуються в криптографії, моделюванні фізичних процесів, поведінки людей, у біології, і в цілій купі інших важливих і цікавих штук.

Найпростіших клітинних автоматів існує всього 256, і поведінка деяких з них дублює інші. Але, незважаючи на це, широко відомий у вузьких колах Стивен Вольфрам присвятив роки життя їх вивченню.

Для початку визначимося з термінологією. Тому що варіантів таких автоматів усього 256, Вольфрам запропонував називати їх числами від 0 до 255. Це іменування через свою лаконічність і зручності відмінно прижилася, і з тих пір називається "Код Вольфрама".

Що означають коди Вольфраму?

Розглянемо відразу на прикладі. Візьмемо номер правила, наприклад, 110. Визначимо це значення в двійковій системі:  $110_{10} = 01101110_2$ .

Впишемо цифри двійкової вистави числа в таблицю:

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	1	0	1	1	1	0

Залежно від станів сусіда ліворуч, самої клітки й сусіда праворуч (перший рядок таблиці) на наступному кроці клітка прийме один із станів, зазначених у другому рядку. Більш наочно це можна представити так, як показано на рисунку 4.5.

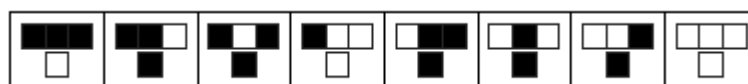


Рисунок 4.5 – Клітинна вистава правил простих автоматів

Також Вольфрам запропонував розділити клітинні автомати на чотири класи по типу поведінки:

**1 клас:** усі клітки швидко ухвалюють однаковий стан, який стає стабільним. Наприклад, Правило 40.

**2 клас:** стан усіх кліток швидко стабілізується, або виникають періодичні коливання. Наприклад, Правила 3 і 33.

**3 клас:** автомат породжує хаотичні, неперіодичні структури. Невеликі зміни вихідного стану тягнуть значні зміни в результаті. Наприклад, правило 22.

**4 клас:** автомат породжує складні, взаємодіючі між собою структури, здатні виживати тривалий час, однак не досягає стабільності. Наприклад, правило 193.

Картини, які створюють деякі автомати, знаходять своє відображення в житті. От, наприклад, на рисунку 4.6 показаний молюск – Текстильний конус, самий небезпечний для людини молюск із сімейства Конуси. Протиотрути від його отрути поки немає. Рисунок на його раковині – не що інше як візерунок, породжений Правилем 30.



Рисунок 4.6 – Рисунок на раковині молюска, подібний  
рисунку Правила 30

Є цілий ряд клітинних автоматів (правила 18, 22, 126, 161, 182, 218, etc.), які, розбудовуючись із однієї точки, породжують фрактальні зображення. Наприклад, рисунок правила 22 — це трикутник Паскаля по модулю 2 (такий дискретний аналог «Серветки Серпинського»). Його вигляд показаний на рисунку 4.7.

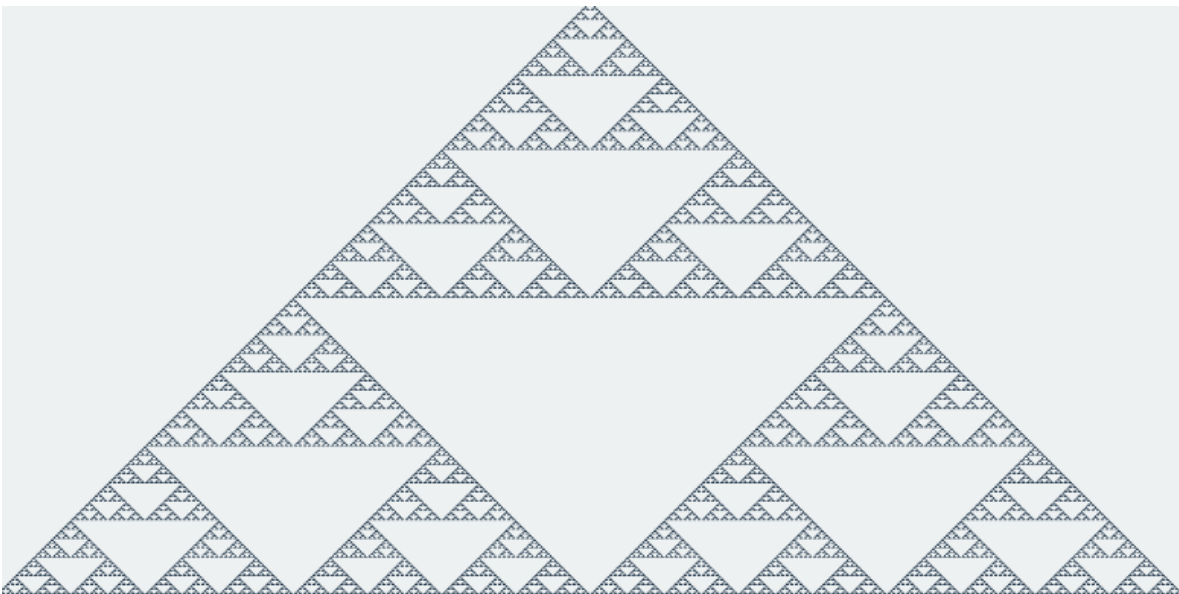


Рисунок 4.7 – Фрактал «Трикутник Паскаля» побудований по  
Правилу 22

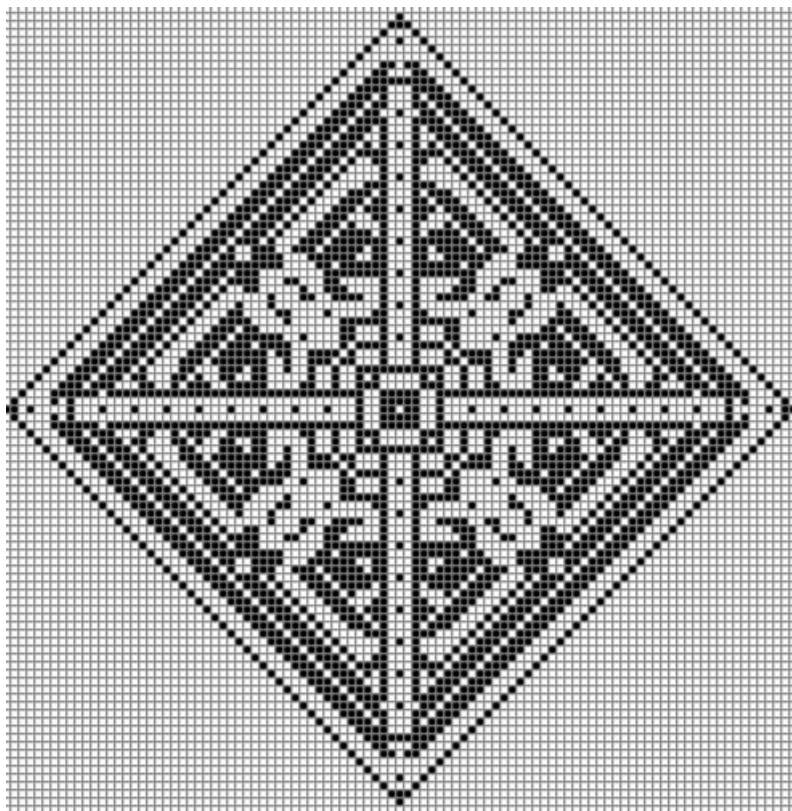


Поставимо запитання: чи можливе мимовільне (без участі яких-то вищих сил) утворення клітин, рослин та тварин? Як з однієї єдиної заплідненої клітки шляхом розподілу утворюється багатоклітинний організм із різноманітними внутрішніми органами, найскладнішою нервовою системою? Сучасна наука відповідає на ці питання. Виявляється, для утвору найскладніших структур досить мати деякі початкові умови й можливість змін по дуже простих законах. Клітинні автомати ідеально підходять для моделювання процесів саморозвитку.

Розглянемо бінарний КА з околицею Неймана й законом зміни стану кліток, наведеному у таблиці.

Стан клітки	Стан околиці	Новий стан клітки
0	0	0
0	1, 2, 3, 4	1
1	0, 1	1
1	2, 3, 4	0

Якщо задати стан 1 для однієї клітки в центрі, то можна бачити як з неї, як із зародка внаслідок взаємодії кліток «виросте» симетрична складна структура (рис. 4.8).



*Рисунок 4.8 – Результат розвитку складної структури із однієї клітки*

## 4.9 У яких задачах потрібні КА?

Часто основні особливості досить складної динамічної системи можуть бути відбиті в простих правилах. Бажання відшукати ці найпростіші правила, що управляють поведінкою складної динамічної системи, і є однією із причин популярності КА. Ця задача в деякому змісті аналогічна зворотній задачі хімічної кінетики: по поведінці системи в часі визначити правила, що управляють системою.

Найбільше ефективно КА використовуються при описі різних фазових або біфуркаційних переходів, де важливо враховувати флуктуації, де колективна поведінка системи визначається локальною поведінкою складових її елементів, при описі таких перехідних процесів, коли система стає сильно неоднорідною й представляється скрутним визначення яких-небудь усереднених по всій системі змінних, здатних адекватно відбивати її стан у цілому. У якості декількох прикладів використання КА при аналізі складних систем можна вказати наступні випадки.

КА застосовуються:

- при аналізі відбитків пальців;
- для опису фазових переходів у фізико-хімічних системах і при аналізі переходів «вільний рух – затор», що трапляються при вуличному русі по місту;
- при аналізі формоутворення різних структур (наприклад, малюнків раковин морських молюсків або смуг зебри);
- при аналізі колективного руху живих організмів (бджіл, риб, птахів і ін.);
- при знаходженні оптимального шляху для огляду розкиданих об'єктів і в багатьох інших випадках.

Великий клас задач, у яких знаходять застосування імовірнісні КА, пов'язаний із впливом флуктуацій на поведінку нелінійних динамічних систем, що володіють критичними або біфуркаційними точками. Для розв'язку таких задач традиційно використовуються керуючі рівняння й рівняння Ланжевена, які застосовуються для опису еволюції у часі. Однак ці рівняння рідко піддаються аналітичному розв'язку. В основному вони вирішуються для простих «точечних» систем, що полягають із однієї-двох змінних. При розв'язку ж задач розподілених систем типу «реакція-дифузія-конвекція» з урахуванням флуктуацій традиційні методи стають практично незастосовні. Тому тут починають успішно застосовуватися клітинні автомати.

## 5 ЗАСТОСУВАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

“Усе життя – від найпростіших до найскладніших організмів, включаючи людину, є довгий ряд усе ускладнюючихся зрівноважувань навколишнього середовища”.

І.П.Павлов

### 5.1 Сучасні вистави про штучний інтелект і нейронних мережах

Термін "штучний інтелект" був уведений у результаті невдалого перекладу з англійського "artificial intelligence", що насправді означає "уміння міркувати розумно".

Родоначальником штучного інтелекту вважають середньовічного іспанського філософа, математика й поета Раймонда Луллія, який намагався в XIII столітті створити механічну машину для розв'язку різних завдань на основі розробленої їм класифікації понять, інакше кажучи, структури деякої бази знань. В XVIII столітті ідею Луллія продовжили Лейбніц і Декарт, які запропонували універсальні мови класифікації – перші теоретичні роботи в області штучного інтелекту. Однак, як наука, штучний інтелект сформувався в результаті досліджень Норберта Вінера – батька кібернетики. У цей час – це одна з найбільш перспективних і престижних областей інформатики.

Сучасна ідея штучного інтелекту формулюється в такий спосіб: "Єдиний об'єкт, здатний мислити, – це людський мозок. Тому будь-який мислячий пристрій повинний якимось чином відтворювати його структуру". У зв'язку із цим було прийнято орієнтування на програмно-апаратне моделювання структури мозку й створення елементів, аналогічним нейронам – нервовим кліткам мозку.

Перші нейронні структури були створено в 1956 – 1965 роках Розенблаттом і Мак-Каллоком. Ці пристрої були названі перцептронами (perceptron). Однак перцептрони не одержали широкого поширення, тому що результати їх застосування були невтішними через спрощені топологічні й алгоритмічні побудови.

Розвиток ідей Розенблатта дозволив створити ряд топологічних варіантів нейронних мереж і алгоритмів їх навчання, які знайшли застосування для розв'язку досить складних практичних завдань. Нейронні мережі будувалися на базі існуючих комп'ютерів шляхом програмного моделювання структури нейрона. При цьому база знань нейрона створювалася шляхом введення навчальної вибірки – *набору даних у вигляді масивів вхідних і*

*бажаних вихідних сигналів.*

Однак при такому підході не вдавалося вирішувати дуже важливі для практики завдання по машинному перекладу текстової інформації (ідея послівного перекладу виявилася неефективною), по керуванню робототехнікою (вирішення проблем у створенні, зберіганні й обробці тривимірної візуальної інформації), а також завдання в області прийняття розв'язків по складних проблемах, у розпізнаванні образів, у машинній творчості й ін.

Починаючи із середини 1980-х років, інтерес до штучного інтелекту став різко зростати. У цей час у Японії був створений перший нейрокомп'ютер, а потім і трансп'ютери – паралельні комп'ютери з великою кількістю процесорів. Трансп'ютерна технологія дозволила моделювати структуру мозку апаратними засобами.

Паралельно з удосконалюванням апаратного забезпечення інтелектуальних систем проводяться великі дослідження в області технології програмування, розробляється теоретичні підходи до створення спеціальних мов для представлення знань. У результаті цих робіт виник новий напрямок – інженерія знань.

Досягнення в області нейромережних технологій значно підвищили ефективність обробки інформації й прийняття розв'язків у ситуаціях, які є важкими як для комп'ютерів із традиційними засобами обробки інформації, так і для людини.

Нейронні мережі знайшли застосування в наступних областях техніки:

- у промисловім виробництві для керування процесами з невизначеними взаємодіями об'єктів, які беруть участь у процесі, а також для діагностики роботи машин, оцінки якості продукції й ін.;
- при передачі інформації для стиску й відображення даних, фільтрації сигналів, розпізнавання мови, перетворення текстової інформації й ін.;
- в електроніці для побудови систем технічного зору, для розміщення мікросхем при проектуванні плати, для нелінійного моделювання й ін.;
- у фінансовій справі для автоматичного читання документів, прогнозування вартості валюти, проведення загального фінансового аналізу;
- в автомобілебудуванні, космонавтиці й аеронавтиці для проектування складних систем керування, моделювання (імітації) процесів руху, побудови алгоритмів керування рухом.

Цей перелік не охоплює всього різноманітності розв'язуваних завдань. У цей час нейронні моделі застосовують практично у всіх видах діяльності людини.

## 5.2 Принципи функціонування біологічного нейрона

Інформацію про навколишнє середовище й внутрішній стан людина одержує від сенсорної системи (аналізатора) – частини нервової системи, що полягає з периферичних рецепторів (органів почуттів), які пов'язані із центральною нервовою системою нервовими волокнами.

У сенсорних органах енергія впливу перетворюється в рецепторний потенціал, який трансформується в імпульсну активність нервової клітки – потенціал дії. Цей потенціал подається в сенсорний центр, клітки якого перетворюють (перекодовують) нервовий сигнал. Сенсорні центри пов'язані з руховими й асоціативними відділами мозку. Ідентифікуючи властивості сигналів, вони подають у рухові центри імпульси, які викликають порушення або гальмування (дію або бездіяльність).

Центральною ланкою в цій системі є мозок, що полягає з нервових кліток – нейронів, кількість яких перевищує 100 мільярдів і кожний з яких має в середньому 10 тис. зв'язків з іншими нейронами.

Біологічний нейрон, схема якого наведено на рисунку 5.1, має тіло, дерево входів – дендрити й вихід – аксон.

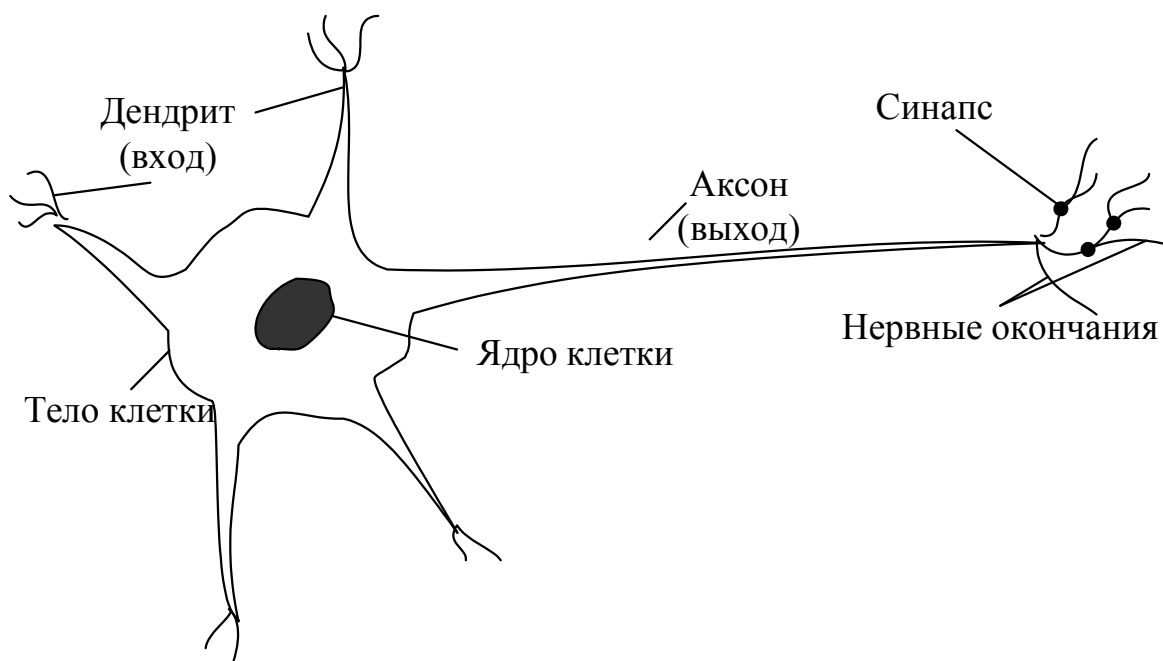


Рисунок 5.1 – Будова біологічного нейрона

Довжина дендритів може досягати одного міліметра, а довжина аксона – сотень міліметрів. Дендрити пов'язані із закінченнями нервових кліток вузлами, які називаються синапсами. Передача імпульсу в синапсі являє собою процес звільнення певної хімічної речовини – нейротрансмітера.

Нейротрансміттер дифундує через синаптичну щілину, збуджуючи або загальмовуючи залежно від типу синапса здатність нейрона-приймача генерувати електричні імпульси. Синапс може налаштуватися минаючими через нього імпульсами, тобто активність синапса визначається передісторією і діє як пам'ять.

Нейрони взаємодіють за допомогою серії імпульсів протягом декількох мілісекунд. Інформація передається шляхом частотної модуляції імпульсів у діапазоні від одиниць герців до декількох сотень герців. При цьому за одну передачу пересилається декілька біт інформації. Незважаючи на порівняно низьку швидкість і малі обсяги пересилань, складні розв'язки можуть ухвалюватися швидко у зв'язку з величезним паралелізмом потоків.

Нейрони діляться на три групи:

- рецепторні, що забезпечують перетворення впливів навколишнього середовища в інформацію для мозку;
- проміжні, що утворюють центральну нервову систему і забезпечують асоціативне перетворення інформації й прийняття розв'язків;
- ефекторні, що забезпечують зв'язок центральної нервової системи з м'язовою системою.

Усі зв'язки між нейронами фізично паралельні. Один шар кліток проектується на іншій, волокна розгалужуються й зливаються, тобто відбувається дивергенція й конвергенція зв'язків.

Практична реалізація такої системи зв'язків представляє поки серйозну проблему, тому що існуючі в цей час нейропроцесори мають обмежену систему команд і зв'язків (нейромережний базис). Тому на практиці застосовують спрощені системи, реалізовані або на нейрокомп'ютерах, або шляхом програмного моделювання на звичайних комп'ютерах.

### 5.3 Модель нейрона

Математична модель нейрона представляється в наступному виді:

$$a = f (wp + b), \quad (5.1)$$

де  $a$  – вихідний сигнал,  $p$  – вхідний сигнал,  $w$  – вага входу,  $b$  – зсув аргументу функції нейрона,  $f (*)$  – функція активації нейрона.

Математичній моделі нейрона зіставлена структурна схема, наведена на рисунку 5.2.

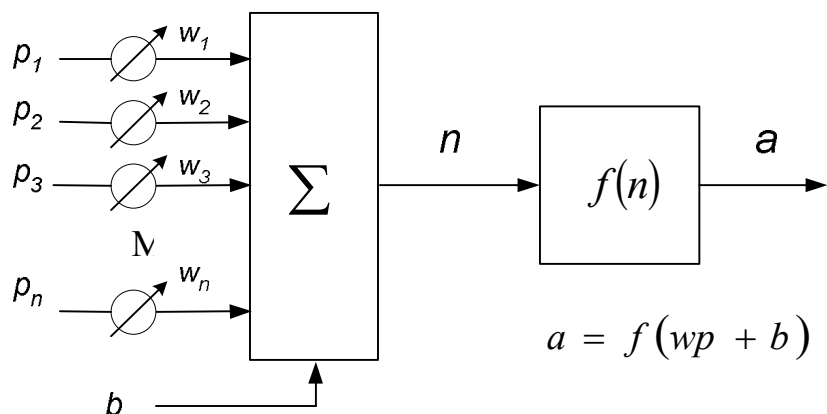
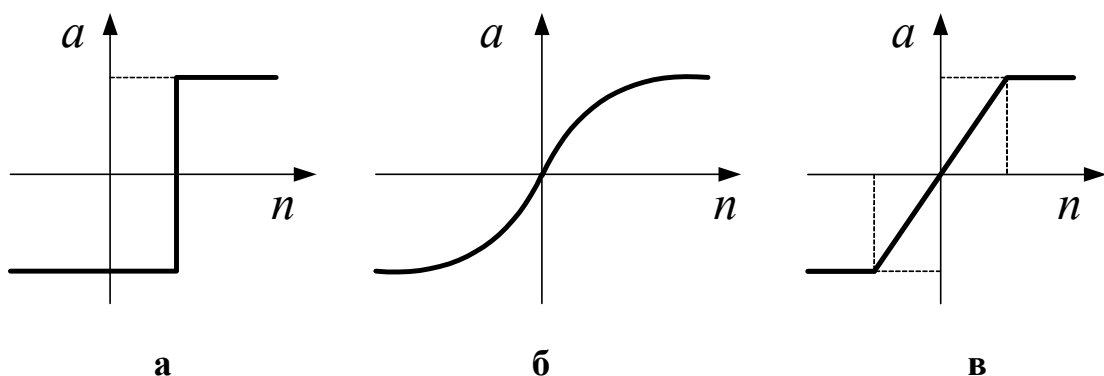


Рисунок 5.2 – Структурна схема моделі нейрона

Блок функціонального перетворення  $f(n)$  реалізує одну з функцій активації, приклади яких наведені на рисунку 5.3. Вид функції активації вибирається з урахуванням особливостей розв'язуваних завдань.

Недоліком граничної й лінійної функцій (рис. 5.3, а, в) є різкий розривний характер залежності вихідного сигналу від вхідного, що неприродно для умов багатьох процесів.



а – гранична зі зсувом; б – сигмоїдна; в – лінійна з насиченням

Рисунок 5.3 – Види деяких функцій активації нейрона

Компромісом двох розглянутих функцій є сигмоїдна функція (рис. 5.3, б), яку можна задати, наприклад, вираженням:

$$a = \frac{1}{1 + e^{-n}} \quad (5.2)$$

Структуру нейрона, показану на рисунку 6.2, прийнято зображувати укрупненою схемою (рис. 5.4).

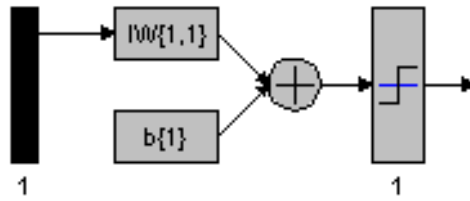


Рисунок 5.4 – Укрупнена структурна схема нейрона

Тут вхід нейрона зображується у вигляді темної вертикальної риси, під якою вказується кількість елементів входу  $R$ . Вектор входу множиться на вектор-рядок  $\mathbf{W}$  довжини  $R$ . Зсув  $b$  являє собою скалярну величину з константою 1. Результат підсумовування перетвориться функцією активації, умовно зображеної на вихідному блоці.

Паралельне включення нейронів утворює шар нейронної мережі.

#### 5.4 Архітектура одношарових і багатшарових нейронних мереж

Архітектура (топология) мережі – це графічна ілюстрація з'єднання нейронів.

Розрізняють одношарову й багатшарову архітектуру. В одношарових мережах нейрони з'єднуються кожний з кожним або регулярно, причому кожний з нейронів може бути вхідним і вихідним (рис. 5.5).

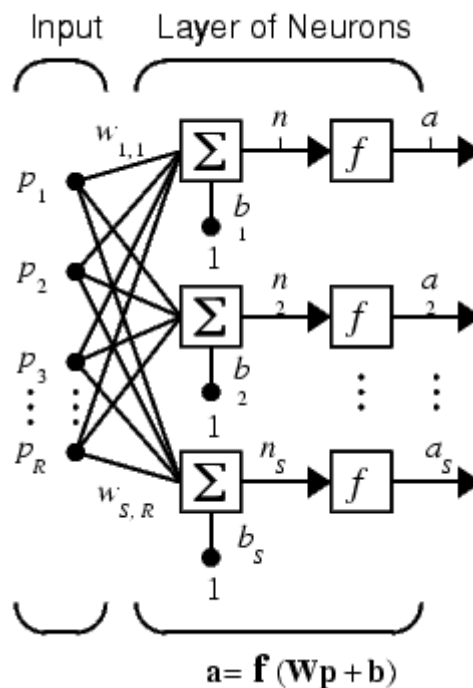


Рисунок 5.5 – Топология одношарової мережі



У багатошарових мережах нейрони групуються в шари. Класичною схемою зв'язку є зв'язок нейронів одного шару з кожним нейроном іншого шару. У середині шару нейрони зв'язків не мають (рис. 5.6). Якщо кількість шарів у мережі більше двох, внутрішні шари називаються схованими.

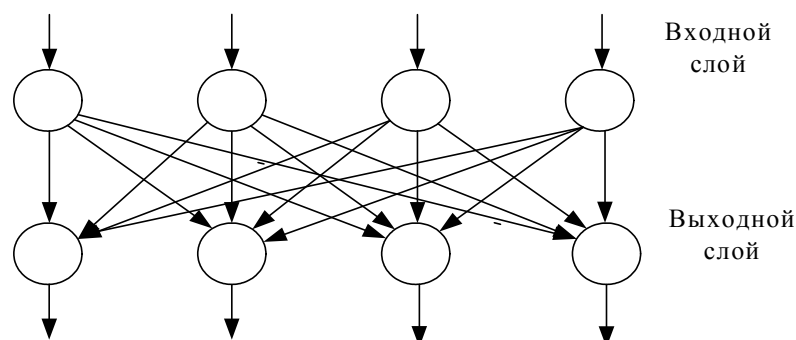


Рисунок 5.6 – Двошарова мережа із прямими зв'язками

При конструюванні мережі необхідні наступні дані:

- розмірності векторів вхідних і вихідних сигналів;
- формулювання завдання;
- необхідна точність розв'язку завдання.

На підставі цих даних розроблювач повинен вибрати:

- тип топології мережі;
- число нейронів по шарах;
- функцію активації нейронів;
- спосіб завдання й зміни коефіцієнтів синаптичного зв'язку.

По способу розв'язку завдань мережі діляться на наступні класи:

- формовані мережі, які проектують для формалізуємих завдань, що мають у нейромережному базисі чіткий алгоритм розв'язку;
- мережі з формованою матрицею зв'язків, які проектують для трудноформалізуємих завдань і в яких асоціативна пам'ять створюється по навчальній вибірці шляхом завдання матриці коефіцієнтів;
- мережі, які проектують для неформалізуємих завдань і в яких асоціативна пам'ять формується поступово в міру навчання.

Таким чином, топологія мережі безпосередньо визначається особливостями розв'язку завдання.

Багатошарова мережа може формувати на виході довільну багатомірну функцію при відповідному виборі кількості шарів, діапазону зміни сигналів і параметрів нейронів. Як і ряди, багатошарові мережі виявляються універсальним інструментом апроксимації функцій.

З наступних виражень видна відмінність роботи нейронної мережі від розкладання функції в ряд:

$$\text{Ряд: } f(x) = \sum_i c_i f_i(x)$$

Нейронна мережа:

$$f(x) = F \left( \underbrace{\sum_{i_N} w_{i_N j_N N} \dots \sum_{i_2} w_{i_2 j_2 2} F \left( \underbrace{\sum_{i_1} w_{i_1 j_1 1} x_{i_1 j_1 1} - \theta_{j_1 1}}_{\text{слої 1}} \right)}_{\text{слої 2}} - \theta_{j_2 2} \dots - \theta_{j_N N} \right)$$

За рахунок почергових розрахунків лінійних комбінацій і нелінійних перетворень досягається апроксимація довільної багатомірної функції при відповідному виборі параметрів мережі.

У практиці моделювання найбільше поширення одержав багатошаровий перцептрон, показаний на рисунку 5.7. У багатошаровому перцептроні немає зворотних зв'язків. Такі моделі називаються *мережами прямого поширення*. Багатошаровий перцептрон містить вхідний шар, схований шар і вихідний шар нейронів.

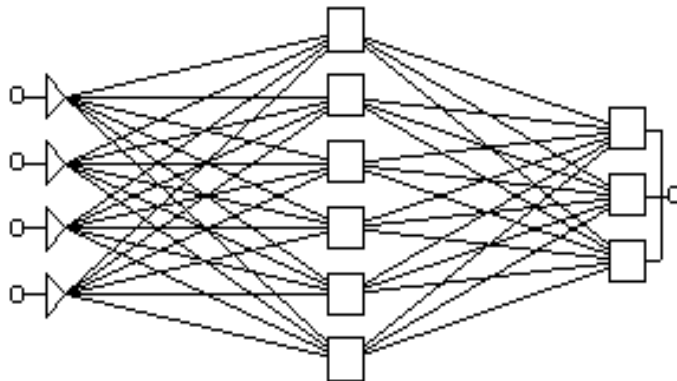


Рисунок 5.7 – Структура класичного перцептрона Розенблатта із вхідним, вихідним і одним схованим шарами

### 5.5 Формування архітектури нейронної мережі й алгоритм розв'язку завдань

Архітектура мережі складається з опису того, скільки шарів має мережа, скільки нейронів у кожному шарі, який вид функції активації кожного шару, а також як з'єднані шари один з одним. Архітектура мережі залежить від конкретного завдання, яке повинна вирішувати мережа.

Робота мережі полягає в обчисленні значень, установлюваних на виході мережі, за значеннями входів і значеннями бажаних результатів.

Вхідний шар може складатися з одного нейрона або декількох нейронів, тому що кожний нейрон може мати  $R$  входів. Кількість нейронів у вхідному шарі залежить від кількості вхідних змінних

Вихідний шар, у якому кожний нейрон має один вихід, повинен складатися з кількості нейронів, *рівного кількості вихідних змінних*.

Таким чином, конкретне завдання визначає кількість входів і виходів мережі.

Кількість схованих шарів залежить від складності розв'язуваного завдання. Так, наприклад, для апроксимації функції, яка безперервна й визначена на кінцевій безлічі точок досить створити тришаровий перцептрон (один схований шар). Для більш складних завдань буде потрібно створити мережу із двома або трьома схованими шарами. Остаточний розв'язок слід ухвалювати після експериментальних досліджень.

Вибір правильної кількості нейронів у схованих шарах є дуже важливим. При занадто малій кількості нейронів мережа не зможе навчитися, а при занадто великій відбудеться збільшення часу навчання мережі (до фактично нереального значення). Також це може привести до перенавчання мережі. Перенавчання проявляється в тому, що мережа буде показувати високу точність на навчальній вибірці, але демонструвати дуже погані збіги на практиці, коли подаються трохи інші дані.

Це відбувається через те, що мережа буде мати надлишкові здатності до навчання й поряд зі значними для даного завдання факторами буде враховувати риси, характерні лише для даної навчальної вибірки.

Для вибору кількості нейронів у схованих шарах можна скористатися рекомендаціями. Так, наприклад, існує правило геометричної піраміди, по якому число нейронів схованого шару в тришаровому перцептроні обчислюється по наступній формулі:

$$k = \sqrt{n \cdot m}, \quad (5.3)$$

де  $k$  – число нейронів у схованому шарі,

$n$  – число нейронів у вхідному шарі;

$m$  – число нейронів у вихідному шарі.

Наступним важливим завданням проектування мережі є вибір функції активації.

Вибір функції активації залежить від необхідного виду відображення. Для лінійних відображень застосовують лінійні функції активації, для нелінійних відображень – нелінійні функції активації.

Кожний шар багат шарової мережі розраховує нелінійне перетворення від лінійної комбінації сигналів попереднього шару. Звідси видно, що лінійна функція активації може застосовуватися тільки для тих моделей мереж, де не потрібне послідовне з'єднання шарів нейронів один за одним. Для багат шарових мереж функція активації повинна бути нелінійною, інакше можна обмежитися побудовою еквівалентної одно шарової мережі й багат шарова мережа виявляється непотрібною. Якщо застосована лінійна функція активації, то кожен шар буде давати на виході лінійну комбінацію входів. Наступний шар дасть лінійну комбінацію виходів попереднього, а це еквівалентно одній лінійній комбінації з іншими коефіцієнтами, і може бути реалізовано у вигляді одного шару нейронів.

Зсув нейронів дозволяє сформувати більш складні зв'язки між вхідними й вихідними сигналами – навіть при нульових вхідних сигналах шляхом навчання можна одержати довільну величину вихідного сигналу.

Після визначення архітектури мережі необхідно виконати наступне.

1. Задати діапазон зміни входів, виходів, ваг і граничних рівнів, враховуючи безліч значень обраної функції активації.

2. Привласнити початкові значення ваговим коефіцієнтам і граничним рівням і додатковим параметрам (наприклад, крутості функції активації, якщо вона буде настраюватися при навчанні). Початкові значення не повинні бути великими, щоб нейрони не виявилися в насиченні (на горизонтальній ділянці функції активації), інакше навчання буде дуже повільним. Початкові значення не повинні бути й занадто малими, щоб виходи більшої частини нейронів не дорівнювалися нулю, інакше навчання також сповільниться.

3. Провести навчання, тобто підібрати параметри мережі так, щоб завдання вирішувалося щонайкраще. По закінченню навчання мережа готова розв'язати завдання того типу, якому вона навчена.

4. Подати на вхід мережі умови завдання у вигляді вхідного вектора  $\mathbf{X}$ . Розрахувати вихідний вектор  $\mathbf{V}$ , який і дасть формалізований розв'язок завдання.

## 5.6 Формалізація завдання

Багат шаровий перцептрон може розраховувати вихідний вектор  $\mathbf{y}$  для будь-якого вхідного вектора  $\mathbf{X}$ , тобто давати значення деякої векторної функції  $\mathbf{v} = f(\mathbf{x})$ . Отже, умова будь-якого завдання, яке може бути поставлена перцептроні, повинне бути безліччю векторів  $\{\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^s\}$  з  $N_I$  компонентами кожний:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1^s \\ \dots \\ x_{N_I}^s \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Розв'язком завдання буде безліч векторів  $\{\mathbf{y}^1 \dots \mathbf{y}^s\}$ , кожний вектор з  $N_I$  компонентами;  $\mathbf{y}^s = \mathbf{f}(\mathbf{x}^s)$ , де  $s=1 \dots S$  – номер пред'явленого зразка.

Усе, що здатний зробити перцептрон, — це сформувати відображення  $X \rightarrow Y$  для  $\forall x \in X$ . Дане відображення ми не можемо витягти повністю з перцептрона, а можемо тільки порахувати відображення довільної кількості точок:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \rightarrow \mathbf{y}^1 \\ \dots \\ \mathbf{x}^s \rightarrow \mathbf{y}^s \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

тут безліч векторів  $\mathbf{x}^1 \dots \mathbf{x}^s$  – формалізована умова завдання, а безліч  $\mathbf{y}^1 \dots \mathbf{y}^s$  – формалізований розв'язок.

Завдання формалізації, тобто вибору змісту, яким наділяються компоненти вхідного й вихідного векторів, поки що вирішується тільки людиною на основі практичного досвіду Жорстких рецептів формалізації для нейронних мереж поки не створено.

Розглянемо, як вибирається зміст вхідних і вихідних даних у найпоширеніших випадках.

### ***Завдання класифікації.***

Нехай є деякий об'єкт, який характеризується набором параметрів  $p_1 \dots p_N$ . Нехай також є  $M$  класів об'єктів –  $C_1 \dots C_M$ .

При цьому є можливість розрахувати або виміряти параметри об'єкта. Тоді об'єкт можна представити вектором  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_N \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Після визначення параметрів об'єкта потрібно визначити, до якого класу віднести об'єкт. Розв'язок цього завдання можна представити у вигляді вектора ймовірностей, з якими об'єкт ставиться до класу  $C_M$ .

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_M \end{pmatrix} \text{ при умовах } 0 \leq c_M \leq 1 \text{ і } \sum_{m=1}^M c_M = 1. \quad (5.7)$$

Так, наприклад, якщо  $C_1 = 0,9$ , а  $C_2 = 0,1$ , те це означає, що об'єкт із набором параметрів  $\mathbf{p}$  з імовірністю  $0,9$  належить до класу  $C_1$  і з імовірністю  $0,1$  до класу  $C_2$ .

Якщо створити багатошаровий перцептрон з  $N$  входами й  $M$  виходами й навчити його видавати на виході вектор  $\mathbf{c}$  при подачі на вхід вектора  $\mathbf{p}$ , то поставлене завдання буде вирішено.

### ***Прогнозування одновірної функції.***

Нехай задана функція, для якої при навчанні отримані значення ваги нейронів  $W$  і граничних значень  $\Theta$ , визначена на інтервалі часу  $[0, t_0]$ , де  $t_0$  – поточне значення часу.

Потрібно передбачити значення функції при  $t > t_0$ .

Щоб застосувати багатошаровий перцептрон для прогнозування, час треба буде дискретизувати. Будемо вважати відомими значення функції в моменти часу:

$$\begin{pmatrix} x_0 = f(t_0) \\ x_1 = f(t_0 - \delta_1) \\ x_2 = f(t_0 - \delta_1 - \delta_2) \\ \dots \\ x_n = f(t_0 - \delta_1 - \dots - \delta_n) \end{pmatrix} = \mathbf{x}, \quad \delta_i > 0 \quad (5.8)$$

Будемо прогнозувати значення функції в момент часу  $(t_0 + \delta_0)$  для  $\forall \delta > 0$ . Величина  $\delta_0$  називається інтервалом прогнозування. Розв'язком завдання будемо вважати значення  $f(t_0 + \delta_0) = y$ .

Побудуємо мережу, що має  $n$  входів і 1 вихід. У якості вхідного вектора візьмемо вектор  $\mathbf{x}$ , а вихідного — один сигнал  $y$ .

Така мережа прококує значення функції в одній точці в по  $(n+1)$  відомим значенням функції, заданим вектором  $\mathbf{x}$ . Вибравши при навчанні мережі набір інтервалів  $\delta_i$ , його вже не можна змінити після навчання. Мережа з даними параметрами  $W$ ,  $\Theta$ , отриманими при навчанні, може прогнозувати тільки з одним набором  $\delta_i$ .

## **5.7 Навчання перцептрона**

Навчання мережі полягає в підстроюванні вагових коефіцієнтів кожного нейрона. Нехай є набір пар векторів  $(x^{\delta}, y^{\delta})$ ,  $\delta = 1..p$ , названий навчальною вибіркою. Будемо називати нейронну мережу навченою на даній навчальній вибірці, якщо при подачі на входи мережі кожного вектора  $x^{\delta}$  на виходах щораз виходить відповідний вектор  $y^{\delta}$ .

Запропонований Ф. Розенблаттом метод навчання полягає в ітераційнім підстроюванні матриці ваги, що послідовно зменшує помилку у вихідних векторах.

Алгоритм включає кілька кроків:

Крок 0. Початкові значення ваг усіх нейронів  $W(t=0)$  покладаються випадковими.

Крок 1. Мережі пред'являється вхідний образ  $x^{\delta}$ , у результаті формується вихідний образ  $y_0^{\delta} \neq y^{\delta}$ .

Крок 2. Обчислюється вектор помилки  $\delta^{\delta} = (y^{\delta} - y_0^{\delta})$ , що робиться мережею на виході. Подальша ідея полягає в тому, що зміна вектора вагових коефіцієнтів в області малих помилок повинна бути пропорційною помилці на виході, і дорівнює нулю, якщо помилка дорівнює нулю.

Крок 3. Вектор ваги модифікується по наступній формулі:

$$W(t + \Delta t) = W(t) + \eta X^{\delta} (\delta^{\delta})^T. \quad (5.9)$$

Тут  $0 < \eta < 1$  – темп навчання.

Крок 4. Кроки 1-3 повторюються для всіх навчальних векторів.

Один цикл послідовного пред'явлення всієї вибірки називається епохою.

Навчання завершується після закінчення декількох епох:

- а) коли ітерації зійдуться, тобто вектор ваги перестає змінюватися;
- б) коли повна сумарна по всіх векторах абсолютна помилка стане менше деякого малого значення.

Використовувана на кроці 3 формула враховує наступні обставини:

- а) модифікуються тільки компоненти матриці ваги, що відповідають ненульовим значенням входів;
- б) знак збільшення ваги відповідає знаку помилки, тобто позитивна помилка ( $\delta > 0$ , значення виходу менша необхідної) проводить до посилення зв'язку;
- в) навчання кожного нейрона відбувається незалежно від навчання інших нейронів, що відповідає важливому з біологічної точки зору, принципу локальності навчання.

Даний метод навчання був названий Ф.Розенблаттом “методом корекції зі зворотною передачею сигналу помилки”. Пізніше більш широко стала відома назва “дельта-правило”. Представлений алгоритм ставиться до широкого класу алгоритмів навчання із учителем, оскільки відомі як вхідні вектори, так і необхідні значення вихідних векторів (є вчитель, здатний оцінити правильність відповіді учня).

Доведена Розенблаттом теорема про збіжність навчання по дельта-правилу говорить про те, що перцептрон здатний навчитися будь-якому навчальному набору, який він здатний представити.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Малинецкий, Г. Г. Нелинейная динамика – ключ к теоретической истории? / Г. Г. Малинецкий. – Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 1995. N81 – 14 с.
2. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт – Москва : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
3. Глэйк, Дж. Хаос: Создание новой науки : пер. с англ. М. Нахмансона, Е. Барашковой. / Дж. Глэйк — СПб. : Амфора, 2001. – 398 с.
4. Чуличков, А. И. Математические модели нелинейной динамики / А. И. Чуличков – М. : ФИЗМАЛИТ, 2000. – 296 с.
5. Лоскутов, А. Ю. Проблемы нелинейной динамики. I. Хаос / А. Ю. Лоскутов // Вестн. МГУ. – 2001. № 2. – С. 3–21.
6. Марсден, Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М. : Мир, 1980. – 368 с.
7. Подлазов, А. В. Теория самоорганизованной критичности – наука о сложности. Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей / А. В. Подлазов. – М. : Эдиториал УРСС, 2005.– С. 404-426.
8. Федер, Е. Фракталы: пер. с англ. / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 254 с.
9. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р. М. Кроновер.– Москва : Постмаркет, 2000. – 352 с.
10. Мандельброт, Б. Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. / Б. Б. Мандельброт – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 392 с.
11. Пайтген, Х.-О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем : пер. с англ. / Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер. — М. : Мир, 1993. – 176 с.
12. Захаров, В. С. Некоторые виды фрактальной размерности и способы её вычисления [Электронный ресурс] / В. С. Захаров. – Режим доступа : <http://dynamo.geol.msu.ru/personal/VSZ/papers/DPG/7.pdf>.
13. Захаров, В. С. Анализ корреляционной размерности временных рядов выделения сейсмической энергии. [Электронный ресурс] / В. С. Захаров. – Режим доступа : [http://dynamo.geol.msu.ru/personal/vsz/papers/Dubna\\_07.pdf](http://dynamo.geol.msu.ru/personal/vsz/papers/Dubna_07.pdf).
14. Методы классической и современной теории автоматического управления : Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.5 : Методы современной теории автоматического управления : под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 784 с.
15. Слюсар, В. И. Фрактальные антенны [Электронный ресурс] / В. И. Слюсар // Связь и телекоммуникации. – Режим доступа : <http://www.terraelectronica.ru/files/mail/s071120.pdf>.
16. Шустер, Г. Детерминированный хаос : Введение / Г. Шустер.– М. : Мир, 1988. – 240 с.

17. Мун, Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров: пер. с англ. / Ф. Мун. – М.: Мир, 1990. –312 с.
18. Анищенко, В. С. Знакомство с нелинейной динамикой : Лекции Соровосовского профессора : учеб. пособие / В. С. Анищенко. – М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 144 с.
19. Дмитриев, А. С. Детерминированный хаос и информационные технологии. [Электронный ресурс] / А. С. Дмитриев. – Режим доступа : <http://www.cplire.ru/win/informchaoslab/chaoscomputerra/Dmitriev.html>.
20. Арнольд, В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1990. – 126 с.
21. Постон, Т. Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, Й. Стюарт. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
22. Маневич, Л. И. О теории катастроф [Электронный ресурс] / Л. И. Маневич. – Режим доступа : [http://sins.хаос.ru/pdf/articles/articles\\_r033.pdf](http://sins.хаос.ru/pdf/articles/articles_r033.pdf).
23. Пригожин, И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой / И. Пригожин, И. Стенгерс: пер. с англ. // Общ. ред. В. И. Аршинова, Ю. Л. Климентовича и Ю. В. Сачкова. – М. : Прогресс, 1986. – 432 с.
24. Иванова, Т. Ю. Теория организации : Учебное издание / Т. Ю. Иванова, В. И. Приходько. – Спб. : Питер, 2004. – 268 с.
25. Хакен, Г. Синергетика. / Г. Хакен.– М. : Мир, 1980. – 388 с.
26. Капица, С. П. Синергетика и просторы будущего. / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий – изд. 2-ое. – М.: Эдиториал УРСС 2001. – 288 с.
27. Варнеке, Х.-Ю. Революция в предпринимательской культуре. Фрактальное предприятие : пер. с нем. / Х.-Ю. Варнеке. – М. : Наука. Интерпериодик, 1999. – 280 с.
28. Степин, В. С. Саморазвивающиеся системы и постнеклассическая рациональность [Электронный ресурс] / В. С. Степин. – Режим доступа : [http://philosophy.kture.kharkov.ua/ychbova\\_robota/magistru/.../14.doc](http://philosophy.kture.kharkov.ua/ychbova_robota/magistru/.../14.doc).
29. Синергетическая парадигма. Синергетика образования : под ред. В. Г. Буданова. – М. : Прогресс-Традиция, 2007. – 592 с.
30. Князева, Е. Н. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем / Е. Н. Князева, С. П. Курдюмов. – М. : Наука, 1994. – 236 с.
31. Нейронные сети. Электронный учебник. [Электронный ресурс] / StatSoft - Режим доступа: <http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stneunet.html>
32. Заенцев И. В. Нейронные сети: основные модели. Учебное пособие / И. В. Заенцев. Изд-во ВГУ. Воронеж, 1999.– 76 с.

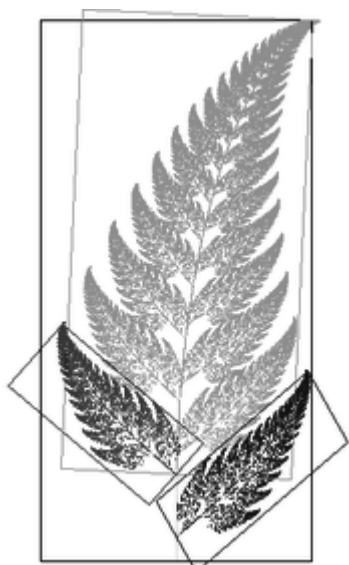
## ГЛОСАРІЙ

**Атрактор.** Множина точок або підпростір у фазовому просторі, до якого наближається траєкторія після загасання перехідних процесів. Класичними прикладами атракторів у динаміці можуть служити точки рівноваги або нерухливі точки відображень, граничні цикли або поверхні торів для квазіперіодичних рухів.

**Афінне перетворення.** Афінне перетворення (лат. *affinis*, «пов'язаний з...») — це відображення  $f: R^n \rightarrow R^n$ , яке можна записати у вигляді:  $f(x) = M \cdot x + v$ , де  $M$  — невироджена матриця і  $v \in R^n$ . Інакше кажучи, відображення називається афінним, якщо його можна отримати наступним способом:

1. Обрати «новий» базис простору з «новим» початком координат  $v$ ;
2. Координатам  $x$  кожної точки простору поставити у відповідність нові координати  $f(x)$ , які мають те саме положення в просторі відносно «нової» системи координат, яке координати  $x$  мали в «старій».

Нижче показано зображення папороті, яке демонструє афінну самоподібність.



**Біфуркація.** Зміна характеру руху динамічної системи на великому тимчасовому інтервалі при зміні одного або декількох параметрів.

**Гамільтонова механіка.** Формально метод, що дозволяє записувати рівняння руху динамічної системи з  $N$  ступенями свободи у вигляді  $2N$  диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку. На практиці під гамільтоновою механікою часто розуміють теорію недисипативних систем з потенційними силами.

**Глобальні/локальні рухи.** Під локальними рухами прийнято розуміти траєкторії динамічних систем, що не йдуть далеко від точок рівноваги. Під глобальними рухами зазвичай розуміють рухи в проміжках між точками рівноваги або від однієї точки рівноваги до іншої, а також траєкторії, що не залишаються в якій-небудь малій області фазового простору.

**Детермінована система.** Динамічна система, рівняння руху, параметри й початкові умови якої відомі й не є стохастичними або випадковими. Деякі рухи детермінованих систем можуть видатися випадковими.

**Канторівська множина.** Формальна множина точок, що залишається після викидання з одиничного інтервалу середньої третини й кількаразового повторення цієї операції над інтервалами, що залишаються. У крайній межі така операція приводить до фрактальної множини точок на прямій з розмірністю, укладеною між 0 і 1.

**Квазіперіодичні коливання.** Коливання із двома або більше непорівнянними частотами.

**Лінійний оператор.** Будь-яка математична операція (диференціювання, множення та ін.), дія якої на суму двох функцій збігається із сумою її дій на кожну з функцій доданків. Лінійний оператор тісно пов'язаний із принципом суперпозиції.

**Різноманіття.** Підпростір фазового простору, у якому залишаються під дією диференціальних або різницевих рівнянь їх розв'язки, якщо початкові умови були обрані в даному підпросторі.

**Множина Мандельброта.** Якщо  $z$  – комплексне змінне, то квадратичне відображення  $z \rightarrow z^2 + c$  має більш ніж один аттрактор. Фіксуєючи початкові умови й змінюючи комплексний параметр  $c$ , можна визначити область притягання як функцію параметра  $c$ . Виникаюча при цьому границя області притягання виявляється фрактальною, а сама область відома за назвою множини Мандельброта.

**Нелінійність.** Властивість системи із входом і виходом або математичної операції, у яких сигнал на виході (результат операції) не пропорційний сигналу на вході. Наприклад, операції  $y = cx^n$  при  $n \neq 1$  або  $x dx/dt$ , або  $y = c(dx/dt)^2$  нелінійні.

**Область притягання.** Множина початкових умов у фазовому просторі, з яких траєкторії виходять на який-небудь конкретний рух або аттрактор. Зазвичай ця множина точок зв'язана й утворює безперервний підпростір у фазовому просторі. Але границя між різними областями притягання може бути, а може й не бути гладкою.

**Відображення.** Математичне правило, що ставить у відповідність одній множині точок у якомусь  $n$ -мірному просторі іншу множину точок.

При ітерації такого правила відображення аналогічне системі різницевих рівнянь.

**Відображення Пуанкаре.** див. **Перетин Пуанкаре.**

**Перебудова.** Термін математичної теорії стійкості, що описує серію задач, близьких до однієї ідеалізованої задачі, яка виникає при введенні малої асиметрії в задачу із симетрією або при введенні слабого загасання в недисипативну динамічну систему. Зміна стійкості або динамічних властивостей ідеалізованої задачі при введенні в неї деяких неідеалізованих членів і називається перебудовою.

**Перехідний хаос.** Рух, який на кінцевому тимчасовому інтервалі виглядає як хаотичний, тобто траєкторія як би рухається по дивному атрактору, але потім виходить на періодичний або квазіперіодичний рух.

**Показники Ляпунова.** Числа, що служать заходом експонентного зближення або розбігання згодом двох сусідніх траєкторій у фазовому просторі з різними початковими умовами. Позитивний показник Ляпунова свідчить про існування хаотичного руху в динамічній системі з обмеженими траєкторіями.

**Положення рівноваги.** В безперервній динамічній системі точка у фазовому просторі, до якої наближається траєкторія після загасання перехідних режимів. У механічних системах під положенням рівноваги зазвичай мають на увазі стан з нульовим прискоренням і нульовою швидкістю. У відображеннях положеннями рівноваги можуть бути кінцеві множини: при ітераціях відображення або різницевого рівняння система послідовно переходить від однієї точки такої множини до іншої. (Положення рівноваги називається також нерухливою точкою.)

**Граничний цикл.** У технічній літературі періодичний рух, що виникає в самозбудній або автономній системі. У літературі по динамічних системах граничний цикл ставиться й до змушених періодичних рухів.

**Розмірність Хаусдорфа-Безиковича.** Ключовою величиною що описує фрактал кількісно є «фрактальна розмірність», однак, у різних джерелах під цим терміном розуміють різні величини: розмірність Мінковського, розмірність Хаусдорфа-Безиковича, розмірність самоподібності. Ці величини відрізняються алгоритмом обчислення, але для математичних фракталів є еквівалентними. Евклідова або вкладена розмірність  $D_e$  (embedding dimension) – це розмірність простору, що включає об'єкт. Топологічна розмірність  $D_t$  – це ціла величина, що характеризує топологічний об'єкт: для лінії  $D_t = 1$ , для площини – 2, для поверхні – 3.  $D_t$  володіє гомеоморфізмом, тобто є інваріантом відносно лінійних перетворень. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича  $D_H$  – це міра розбивки об'єкта  $E$  на частини розміром  $r$  з наступним підрахунком числа  $N(r)$  частин, що покривають досліджуваний об'єкт. Розмірність  $D_H$  інваріантна щодо лінійних перетво-

реть і для її кількісної оцінки використовується величина, яка називається метричним порядком:

$$k(E) = -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r)}{\ln r}$$

$k(E)$  пов'язана з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича співвідношенням:  $D_H > k(E)$ .

**Самоподоба** (автомодельність). Властивість множини точок, геометрична структура якої в одному масштабі подібна його геометричній структурі в іншому масштабі.

**Сідло** (сідлова точка). У геометричній теорії звичайних диференціальних рівнянь точка рівноваги з дійсними власними значеннями, з яких принаймні одне позитивне й одне негативне.

**Перетин Пуанкаре**. Послідовність точок у фазовому просторі, породжувана перетинанням безперервною траєкторією з поверхнею загального виду або площиною в просторі.

**Символічна динаміка**. Динамічна модель, у якій дискретизований не тільки час, але й змінні стани ухвалюють тільки кінцеву множину значень, наприклад  $(-1, 0, 1)$ . Враховуючи те, що припустима множина значень скінченна, то можна зіставити їм будь-який набір символів, наприклад  $(L, C, R)$ . Тоді динамічній траєкторії буде відповідати деяка послідовність символів. Методи символічної динаміки використовуються також у теорії клітинних автоматів.

**Стохастичний процес**. Тип хаотичного руху, що зустрічається в консервативних, або недисипативних, динамічних системах.

**Дивний аттрактор**. Притягуюча множина у фазовому просторі, по якому рухаються хаотичні траєкторії, або будь-який аттрактор, який не є положенням рівноваги, граничним циклом або квазіперіодичним аттрактором, або аттрактор у фазовому просторі із фрактальною розмірністю.

**Подвоєння періоду**. Зазвичай мається на увазі послідовність періодичних коливань, у якій при зміні деякого параметра відбувається подвоєння періоду. У класичній моделі біфуркації подвоєння періоду (половинної частоти) відбуваються через монотонно зменшувані інтервали керуючого параметра. Після проходження критичного значення параметра (точки нагромадження) виникають хаотичні коливання. Такий сценарій переходу до хаосу спостерігається в багатьох фізичних системах, але не є єдиним маршрутом, що веде до хаосу.

**Універсальна властивість** (універсальність). Властивість динамічної системи, що залишається незмінною у межах деякого класу нелінійних задач. Наприклад, число Фейгенбаума для послідовності біфуркаційних

параметрів при подвоєнні періоду є однаковим для деякого класу нелінійних необоротних одномірних відображень.

**Рівняння Лоренца.** Система трьох автономних диференціальних рівнянь, що володіє хаотичними розв'язками. Виведена й досліджена Е. Лоренцем в 1963 р. як модель конвекції в атмосфері. Ця система рівнянь – одна з основних моделей хаотичної динаміки.

**Фазовий простір.** У механіці фазовий простір – це абстрактний математичний простір, у якому координатами служать узагальнені координати й узагальнені імпульси. У динамічних системах еволюційних рівнянь, що задаються системою першого порядку, координатами служать змінні стани, або компоненти вектора стану.

**Фрактал.** Геометрична властивість множини точок в  $n$ -мірному просторі, що володіє самоподобою при різних масштабах і нецілою фрактальною розмірністю, меншою чим  $n$ .

Фрактальна розмірність. Кількісна характеристика множини точок в  $n$ -мірному просторі, що показує, наскільки щільно точки заповнюють підпростір, коли їх число стає дуже великим.

**Хаотичний рух.** Тип руху, чутливий до змін початкових даних. Рух, при якому траєкторії, що задаються незначно одмінними початковими даними, експоненційно розходяться. Рух з позитивним показником Ляпунова.

**Число Фейгенбаума.** Властивість динамічної системи, пов'язана з послідовністю подвоєння періоду. Відношення послідовних різниць параметрів біфуркації подвоєння періоду прагне до числа 4,669... Ця властивість і саме число Фейгенбаума були виявлені в багатьох фізичних системах на стадії, що передує хаосу.

